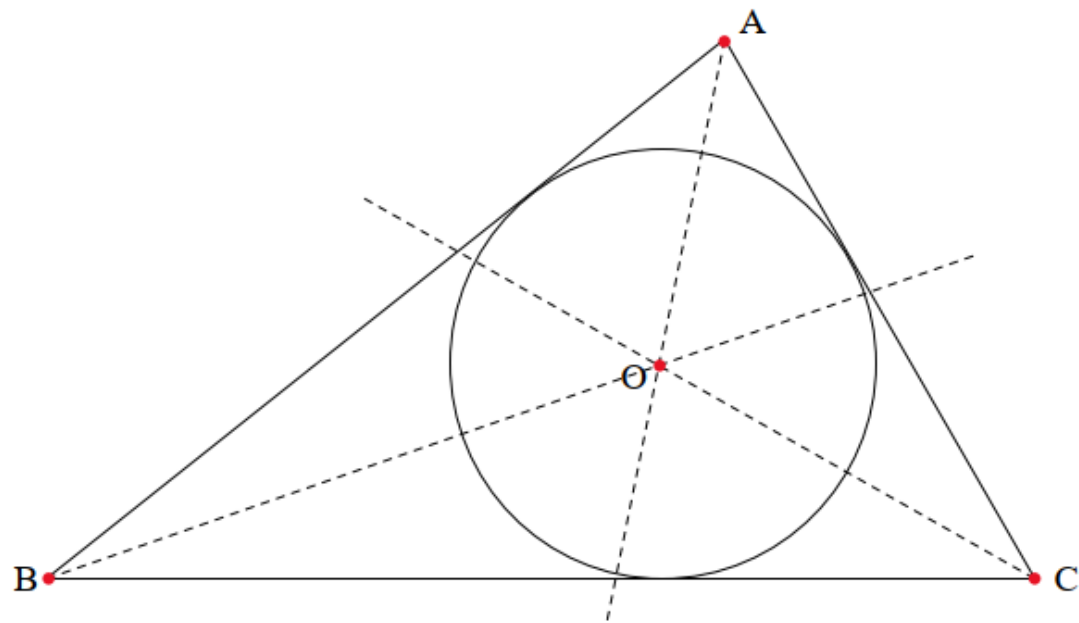


می‌دانیم که نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث در نقطه‌ای درون مثلث هم‌رسند. بنابراین نقطه هم‌رسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث تنها نقطه‌ای است که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. پس اگر دایره‌ای به مرکز نقطه هم‌رسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث و به شعاع فاصله این نقطه تا یک ضلع رسم کنیم این دایره بر هر سه ضلع مثلث مماس است. به این دایره **دایره محاطی داخلی مثلث** می‌گوییم. پس هر مثلث همواره محیطی است.



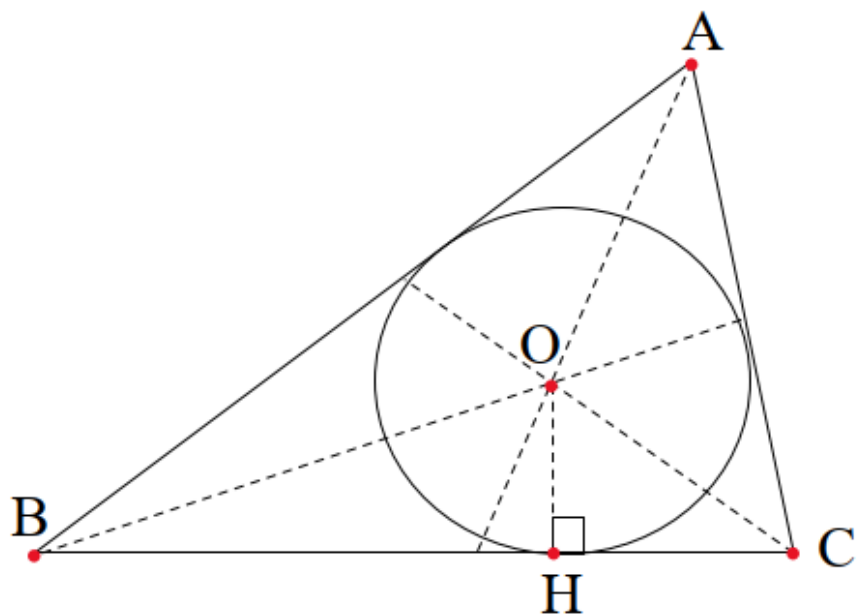
## نکته

اندازه شعاع دایره محاطی مثلث  $ABC$  از رابطه زیر به دست می آید:

$$r = \frac{S}{P}$$

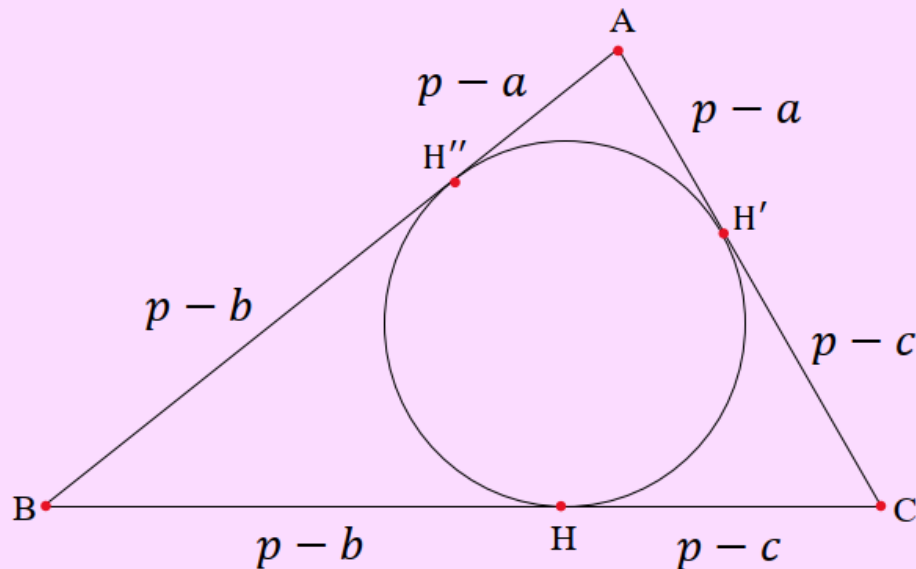
که در آن  $S$  مساحت مثلث و  $P$  نصف محیط مثلث است.

مثال: در شکل زیر دایره محاطی داخلی مثلث  $ABC$  در نقطه  $H$  بر ضلع  $BC$  مماس شده است. اندازه پاره‌های  $BH$  و  $CH$  را بر حسب اندازه‌های اضلاع این مثلث به دست آورید.



## نتیجه

اگر دایره محاطی داخلی مثلث  $ABC$  مطابق شکل در نقاط  $H$ ،  $H'$  و  $H''$  بر اضلاع مثلث مماس باشد آنگاه اندازه قطعات ایجاد شده بر اضلاع به صورت زیر است:



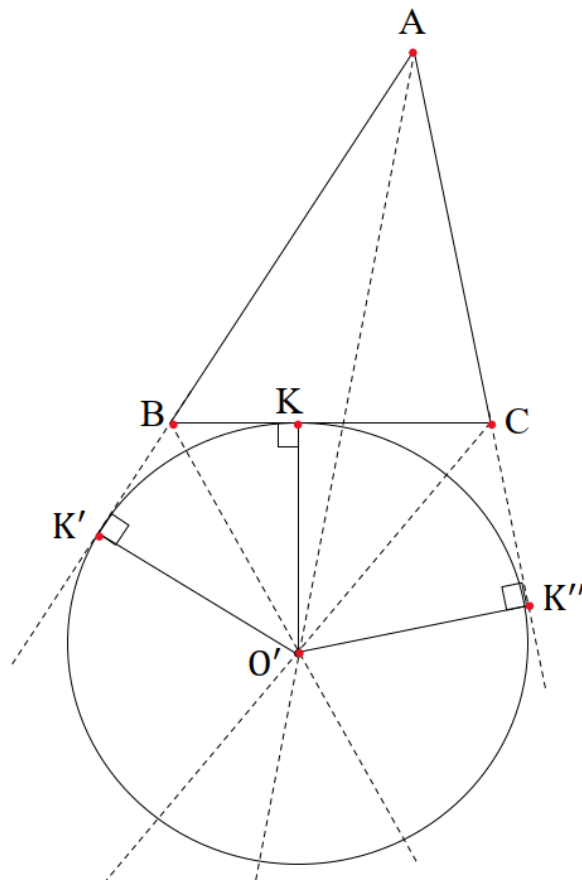
اگر نیمساز زاویه داخلی  $A$  و نیمساز زاویه خارجی  $B$  از مثلث  $ABC$  را رسم کنیم این دو نیم خط در نقطه  $O'$  متقاطع خواهند بود. این نقطه از ضلع  $BC$  و امتداد دو ضلع  $AB$  و  $AC$  به یک فاصله است. بنابراین نقطه  $O'$  مرکز دایره‌ای است که بر ضلع  $BC$  و امتداد اضلاع  $AB$  و  $AC$  مماس است. به این دایره، **دایره محاطی خارجی نظیر ضلع  $BC$  یا دایره محاطی خارجی نظیر رأس  $A$**  می‌گوییم. شعاع این دایره را با  $r_a$  نمایش می‌دهیم. هر مثلث سه دایره محاطی خارجی دارد.

## نکته

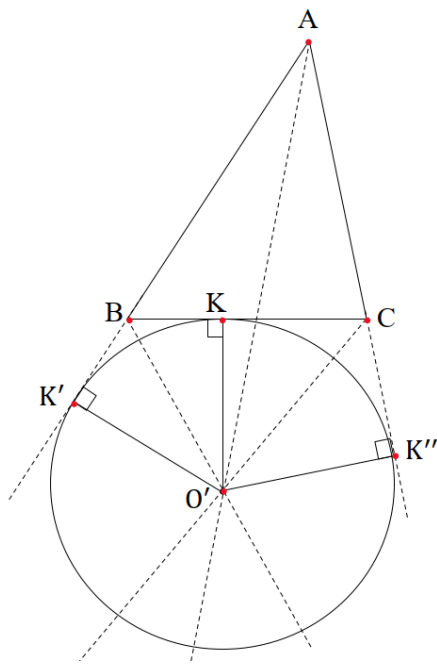
اندازه شعاع دایره محاطی خارجی  
 نظیر ضلع BC در مثلث ABC از  
 رابطه زیر به دست می آید:

$$r_a = \frac{S}{P - a}$$

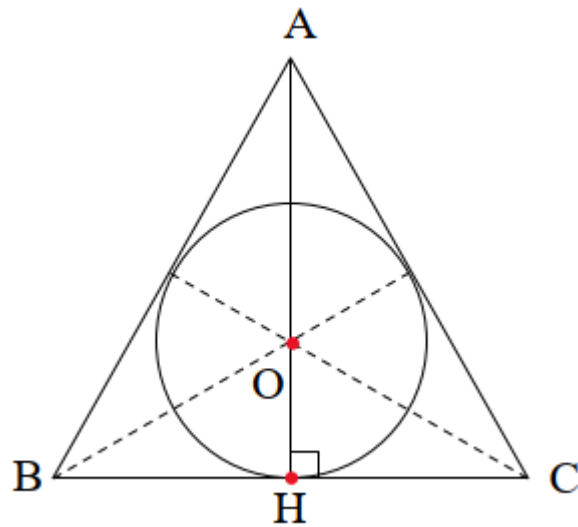
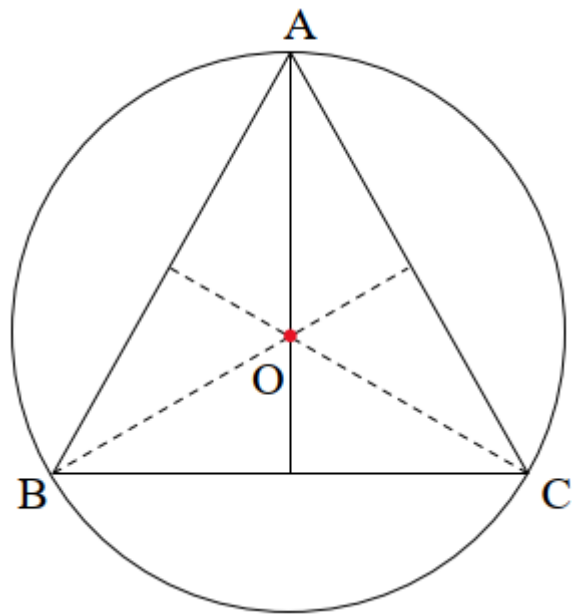
که در آن S مساحت مثلث، P نصف محیط مثلث و a  
 اندازه ضلع BC است.



مثال: در شکل زیر دایره محاطی خارجی نظیر رأس  $A$  در نقطه  $K$  بر ضلع  $BC$  مماس شده است. الف) اندازه پاره‌های  $BK$  و  $CK$  را بر حسب اندازه‌های اضلاع این مثلث به دست آورید. ب) ثابت کنید که حاصل جمع اندازه پاره‌های  $AK'$  و  $AK''$  برابر با محیط مثلث  $ABC$  است.

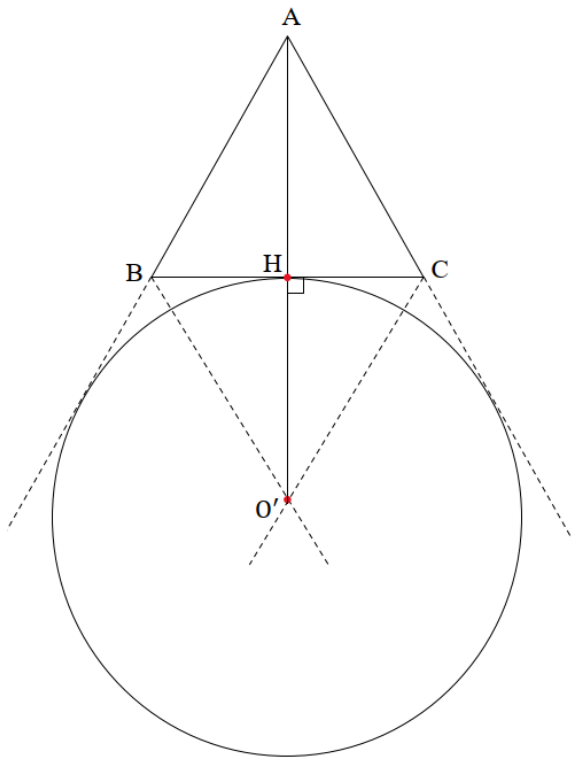


مثال: اندازه شعاع دایره محاطی داخلی و دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $a$  و به ارتفاع  $h$  را به دست آورید.



مثال: اندازه شعاع دایره محاطی داخلی و دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $4\sqrt{3}$  را به دست آورید.

مثال: اندازه شعاع دایره‌های محاطی خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  و به ارتفاع  $h$  را به دست آورید.



## نتیجه

بین اندازه شعاع دایره‌های محاطی داخلی، محیطی و محاطی خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  و به ارتفاع  $h$  رابطه‌های زیر برقرار است:

$$r = \frac{1}{3}h \quad R = \frac{2}{3}h \quad r_a = h$$

$$\frac{r}{1} = \frac{R}{2} = \frac{r_a}{3} = \frac{h}{3} \quad r_a = r + R = h$$

مثال: اگر  $r_a$ ،  $r_b$  و  $r_c$  شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و  $r$  شعاع دایره محاطی داخلی باشد ثابت کنید:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

مثال: اگر  $h_a$ ،  $h_b$  و  $h_c$  ارتفاع‌های سه ضلع مثلث و  $r$  شعاع دایره محاطی داخلی باشد ثابت کنید:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$