

کار در کلاس:

با کامل کردن جدول ارزش‌ها نشان دهید که $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ هم‌ارز هستند.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د					
د	ن					
ن	د					
ن	ن					

با کامل کردن جدول ارزش‌ها نشان دهید که $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د					
د	ن					
ن	د					
ن	ن					

همارزی‌های منطقی بین گزاره‌های مرکب

$$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$$

(۱) قوانین جابه‌جایی:

$$\begin{cases} (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \end{cases}$$

(۲) قوانین شرکت‌پذیری:

$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

(۳) قوانین توزیع‌پذیری:

$$\begin{cases} \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$$

(۴) قوانین دمورگان:

$$\begin{cases} p \wedge (p \vee q) \equiv p \\ p \vee (p \wedge q) \equiv p \end{cases}$$

(۵) قوانین جذب:

$$\begin{cases} p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \\ p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \end{cases}$$

(۶) قوانین شبه‌جذب:

ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q » را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

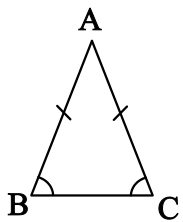
گزاره $p \Rightarrow q$ را به صورت‌های « p شرط کافی برای q است» و « q شرط لازم برای p است» نیز می‌خوانیم.

مثال: ترکیب شرطی «اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد، آن‌گاه دو قطر آن مساوی هستند» را می‌توانیم به دو صورت زیر بنویسیم:

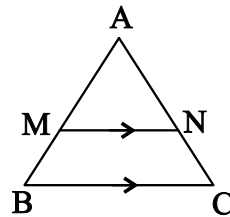
(۱) مستطیل بودن یک چهارضلعی شرط کافی برای مساوی بودن قطرهای آن است.

(۲) مساوی بودن قطرهای یک چهارضلعی شرط لازم برای مستطیل بودن آن است.

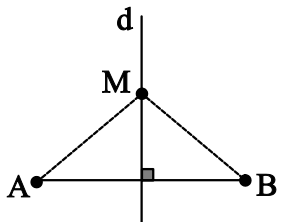
مثال‌های هندسی ترکیب شرطی:



(الف) اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد، آن‌گاه دو زاویه مجاور قاعده برابرند. $\triangle ABC : AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$



(ب) اگر در مثلث ABC داشته باشیم: $MN \parallel BC$ آن‌گاه: $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$



(پ) اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه فاصله این نقطه از دو سر پاره‌خط یکسان است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

۱) ارزش گزاره $(p \Rightarrow q)$ فقط وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

۲) هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه $p \Rightarrow q$ همواره درست است.

در این حالت می‌گویند:

ارزش $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است. $(F \Rightarrow p \equiv T)$

۳) هرگاه ارزش q (تالی) درست باشد، آن‌گاه $p \Rightarrow q$ همواره درست است. $(p \Rightarrow T \equiv T)$

$p \Rightarrow p \equiv T$ (۴)

مثال: ارزش گزاره‌های مرکب زیر را مشخص کنید:

الف) اگر ۲۰ بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه ۲۰ بر ۸ بخش‌پذیر است.

ب) $\sqrt{4} > \sqrt{9} \Rightarrow 2 < 3$

ج) اگر $x^2 + 1 > 0$ باشد، آن‌گاه معادله $x^2 + 2x + 2 = 0$ دارای جواب است.

د) اگر $x^2 + 1 < 0$ باشد، آن‌گاه معادله $x^2 + 2x + 2 = 0$ در مجموعه اعداد حقیقی جواب ندارد.

کار در کلاس: با کامل کردن جدول ارزش‌ها نشان دهید که $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د			
د	ن			
ن	د			
ن	ن			

نتیجه: $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

با کامل کردن جدول ارزش‌ها نشان دهید که $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د				
د	ن				
ن	د				
ن	ن				

گزاره $q \Rightarrow p$ را **عکس ترکیب شرطی** $p \Rightarrow q$ و گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ را **عکس نقیض ترکیب شرطی** $p \Rightarrow q$ می‌گوییم.

قانون ادخال فامل و حذف عاطف:

اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، آن‌گاه:

الف) گزاره مرکب $p \Rightarrow (p \vee q)$ همواره درست است و به آن ادخال فامل می‌گوییم. $p \Rightarrow (p \vee q) \equiv T$

ب) گزاره مرکب $(p \wedge q) \Rightarrow p$ همواره درست است و به آن حذف عاطف می‌گوییم. $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv T$

مثال: درستی قانون ادخال فامل و حذف عاطف را به کمک جدول ارزش‌ها نشان دهید.

مثال: ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه a عددی فرد است.

ترکیب دو شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم.

گزاره $p \Leftrightarrow q$ را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

(الف) اگر p آن‌گاه q و برعکس

(ب) p شرط لازم و کافی برای q است.

(ج) q شرط لازم و کافی برای p است.

(د) p اگر و تنها اگر q یا q اگر و تنها اگر p

مثال: گزاره‌های زیر، نمونه‌ای از ترکیب دو شرطی گزاره‌ها است.

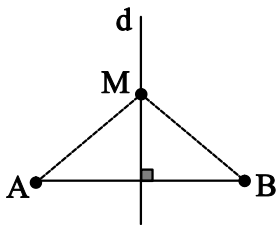
(الف) 6 عدد اول است $\Leftrightarrow 2 > 5$

(ب) 99 عدد اول نیست $\Leftrightarrow \sqrt{2}$ عددی گویا است.

(ج) در پرتاب یک تاس، شرط لازم و کافی برای آن‌که احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

(د) شرط لازم و کافی برای آن‌که نقطه‌ای واقع بر عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، آن است که

فاصله آن نقطه تا دو سر پاره خط برابر باشد. $[M \in d(\text{عمودمنصف } AB)] \Leftrightarrow MA = MD$



با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ را بنویسید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
د	د				
د	ن				
ن	د				
ن	ن				

نکته ۱: ترکیب دو شرطی دوگزاره وقتی درست است که هر دو گزاره هم‌ارزش باشند.

نکته ۲: $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q \equiv \sim q \Leftrightarrow \sim p$

نکته ۳: $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q)$