درس دوم

جبر مجموعه‌ها

مجموعه‌ها، یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که بسیاری از نظریه‌های دیگر ریاضی بر پایه آن شکل گرفته‌اند. اما تاکنون به تعریف دقیقی از مجموعه دست نیافته‌ایم و مانند مفاهیمی چون نقطه و خط در هندسه که برای آن‌ها تعریف دقیقی نداریم، مجموعه نیز این‌گونه است و جزء تعریف‌نشده‌ها است. اما اگر بخواهیم برای قابل فهم‌تر بودن تعریفی بیان کنیم، می‌توانیم بگوییم مجموعه دسته‌ای از اشیا مشخص و دوبه‌دو متمایز است. معمولاً مجموعه را با یکی از حروف بزرگ A، B، C و ... نشان می‌دهیم.

به هر شیء مجموعه یک عضو آن مجموعه می‌گوییم.

به طور مثال اگر x عضو مجموعه A باشد، می‌نویسیم $x \in A$ و اگر x عضو مجموعهٔ A نباشد می‌نویسیم $x \notin A$

مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه تهی می‌نامیم و با نماد $\varnothing$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم.

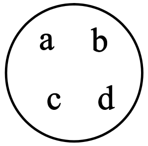
مجموعه مرجع یا جهانی را معمولاً با U نشان می‌دهیم.

نمایش مجموعه با گزاره نما: خاصیت مشترک اعضای یک مجموعه را با $p(x)$ نشان می‌دهیم و آن را گزاره‌نما با متغیر x می‌خوانیم. $A=\{x \in U \mid p(x)\}$

به عنوان مثال، در مجموعه $A=\{x \in \mathbb{Z} \mid x^۲ \le ۴\}$، مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، مجموعه مرجع و $x^۲ \le ۴$ همان $p(x)$ (شرط برای انتخاب x) است.

نمایش هندسی مجموعه‌ها (نمودار ون):

در نمودار ون اعضای مجموعه را درون یک شکل بسته در صفحه مانند دایره یا مستطیل یا ... نشان می‌دهیم.

به طور مثال نمودار ون مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ به صورت 

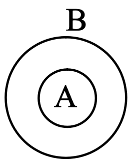
است.

زیرمجموعه: با حذف برخی از اعضای مجموعه غیرتهی A، مجموعه‌های دیگری به دست می‌آیند که به این مجموعه‌های جدید، زیرمجموعه‌های A می‌گوییم. به بیان دقیق‌تر اگر هر عضوی از مجموعه B، عضوی از مجموعه A باشد، B را زیرمجموعه A می‌گوییم و می‌نویسیم: $B \nsubseteq A \Leftrightarrow \exists x;(x \in B \wedge x \notin A)$ $\quad$ $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x;(x \in B \Rightarrow x \in A)$

نکته ۱: هر مجموعه‌ای زیرمجموعه خودش است. $A \subseteq A$

نکته ۲: مجموعه تهی همواره زیرمجموعه A است. $\varnothing \subseteq A$

نکته ۳: هر مجموعه‌ای، زیرمجموعه مجموعه مرجع است. $A \subseteq U$

نکته ۴: اگر $A \subseteq B$ باشد، نمایش نمودار ون آن به صورت 

است.

نکته ۵: مجموعه تهی فقط دارای یک زیرمجموعه است که خودش است. $\varnothing \subseteq \varnothing$

مثال: اگر $A=\{a,\{a\},b,\{a,b\}\}$ چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) $a \in A$ $\quad$ ب) $a \subseteq A$ $\quad$ ج) $\{a\} \in A$ $\quad$ د) $\{a\} \subseteq A$

هـ) $\{a,b\} \in A$ $\quad$ و) $\{a,b\} \subseteq A$ $\quad$ ز) $\{\{a,b\}\} \subseteq A$ $\quad$ ح) $\{a,\{a\}\} \subseteq A$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه:

مجموعه n عضوی A را به صورت $A=\{a_۱,a_۲,...,a_n\}$ در نظر می‌گیریم، اگر مجموعه B زیرمجموعه‌ی مجموعه A باشد و عضو $a_i \in A$ در مجموعه B قرار داشته باشد از رقم ۱ و در غیر این صورت از رقم ۰ در کدگذاری استفاده می‌کنیم.

به طور مثال اگر $A=\{a,b,c\}$ با دو رقم ۰ و ۱ می‌توانیم زیرمجموعه $B=\{b,c\}$ از مجموعه Aرا با کد سه‌رقمی ۰۱۱ مشخص کنیم، چون $a \notin B$ متناظر با آن کد ۰ و $b,c \in B$ متناظر با آن کد ۱ را در نظر می‌گیریم یا مثلاً زیرمجموعه $\{a\} \subseteq A$ را با کد ۱۰۰ متناظر می‌کنیم.

پس هر زیرمجموعه A را می‌توانیم با یک کد n رقمی با دو رقم ۰ و ۱ متناظر کرد، بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کدها برابر است با:

$$\underbrace{۲\times ۲\times \cdots \times ۲}_{\text{n رقم}}=۲^n$$

نکته: اگر A یک مجموعه n عضوی باشد، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با ۲^n است.

یادآوری: تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی برابر با $\binom{n}{k}$ است.

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

نتیجه مهم:

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\cdots+\binom{n}{n}=۲^n$$

مجموعه توانی: مجموعه همه زیرمجموعه‌های A را مجموعه توانی A می‌نامیم و آن را با $p(A)$ نمایش می‌دهیم.

تعداد اعضای مجموعه توانی: اگر A، n عضو داشته باشد، در این صورت $p(A)$ دارای 2^n عضو است.

زیرمجموعه محض (سره): اگر $A \subseteq B$ به طوری که $A \neq B$، آن‌گاه A زیرمجموعه محض یا سره B نامیده می‌شود.

نکته ۱: تعداد اعضای زیرمجموعه محض A برابر است با: $2^n - 1$

نکته ۲: تعداد اعضای زیرمجموعه محض (سره) ناتهی A برابر است با: $2^n - 2$

مثال: مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ مفروض است. مطلوب است:

الف) تعداد کل زیرمجموعه‌ها

ب) تعداد زیرمجموعه‌ها شامل عضو a

ج) تعداد زیرمجموعه‌ها شامل عضوهای a و b

د) تعداد زیرمجموعه‌ها فاقد عضو a

هـ) تعداد زیرمجموعه‌ها فاقد عضوهای a و b

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های A که شامل (فاقد) k عضو مشخص باشند، برابر است با: 2^{n-k}

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی A که

۱- شامل r عضو مشخص باشند برابر است با: $\binom{n-r}{k-r}$

۲- فاقد r عضو مشخص باشند برابر است با: $\binom{n-r}{k}$

مثال: مجموعه متناهی A را در نظر بگیرید، اگر ۲ عضو به اعضـای A اضـافه کنـیم، تعـداد زیرمجموعـه‌های آن ۴۸ واحـد افزایش می‌یابد. مجموعه A چند عضوی است؟

مثال: اگر ۳ عضو جدید به مجموعه A اضافه کنیم، تعداد عضوهای $p(A)$، ۲۲۴ تا افزایش پیدا می‌کنـد. مجموعـه A دارای چند زیرمجموعه سره است؟

مثال: اگر $A=\{a,\{a\}\}$ باشد، مجموعه $p(p(A))$ چند عضو دارد؟

مثال: اگر $A=\{a,b,\{a\},\{a,b\}\}$ و $B=\{a,b\}$ ، مجموعه $A-\{B\}$ چند زیرمجموعه سره غیرتهی دارد؟

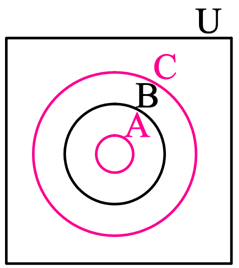
روش عضوگیری دلخواه:

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A \subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های A و B در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند x از A فرض کنیم، سپس با استفاده از فرض‌های داده‌شده نشان دهیم که x در B وجود دارد. از آن‌جا که x دلخواه بوده است، در واقع هر عضو A در B است. بنابراین با توجه به تعریف زیرمجموعه، ثابت کرده‌ایم $A \subseteq B$.

در ادامه چند ویژگی مهم را با روش عضوگیری دلخواه ثابت می‌کنیم.

ویژگی ۱: فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مجموعه مرجع U باشند به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$.

ثابت کنید: $A \subseteq C$



متمم (A'): فرض کنید A مجموعه‌ای با مجموعه مرجع U باشد، متمم مجموعه A برابر با مجموعه اعضایی از U است که متعلق به مجموعه A نباشد و آن را با A' نمایش می‌دهیم: $A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$ از تعریف متمم نتیجه می‌گیریم:

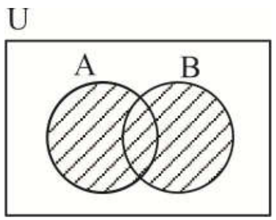
$x \in A \Rightarrow x \notin A'$ یا $x \in A' \Rightarrow x \notin A$

ویژگی ۲: فرض کنید A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع U باشند و $A \subseteq B$ ثابت کنید $B' \subseteq A'$

ویژگی ۳: برای هر مجموعه دلخواه مانند A با مجموعه مرجع U ثابت کنید: $\varnothing \subseteq A$

اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعه A و B که با $A \cup B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای است که اعضایش، همه اعضای A و همه اعضای B را شامل می‌شود.



$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

کار در کلاس ۱: برای مجموعه‌های A و B با مجموعه مرجع U ثابت کنید که $A \subseteq A \cup B$

اثبات: $\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B$

بنابراین داریم: $\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in A \cup B) \Rightarrow A \subseteq A \cup B$

نکته: برای هر دو مجموعه دلخواه A و B داریم: $B \subseteq A \cup B \quad , \quad A \subseteq A \cup B$

کار در کلاس ۲: فرض کنیم A و B و C و D چهار مجموعه با مجموعه مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن‌گاه $A \cup C \subseteq B \cup D$.

اثبات:

$$\forall x; x \in (A \cup C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \\ \vee \\ x \in C \xrightarrow{C \subseteq D} x \in D \end{cases} \Rightarrow x \in B \vee x \in D \Rightarrow x \in (B \cup D)$$

بنابراین داریم: $\forall x; [x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (B \cup D)] \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$

کار در کلاس ۳:

فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مجموعه مرجع U باشد، ثابت کنید: اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$ آن‌گاه $(A\bigcup B)\subseteq C$

به کمک ویژگی ۲ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}A\subseteq C\\B\subseteq C\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ویژگی ۲}} A\bigcup B\subseteq C\bigcup C\Rightarrow A\bigcup B\subseteq C$$

یا:

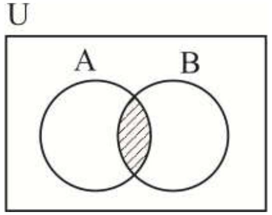
$$\forall x\,;\,x\in(A\bigcup B)\Rightarrow\begin{cases}x\in A\xrightarrow{A\subseteq C}x\in C\\ \vee\\ x\in B\xrightarrow{B\subseteq C}x\in C\end{cases}\Rightarrow x\in C\vee x\in C\Rightarrow x\in C$$

بنابراین داریم:

$$\forall x\,;[x\in(A\bigcup B)\Rightarrow x\in C]\Rightarrow A\bigcup B\subseteq C$$

اشتراک دو مجموعه:

اشتراک دو مجموعه A و B که آن را به صورت $A \cap B$ نمایش می‌دهیم، مجموعه‌ای است که عضوهای آن، همه عضـوهای مشترک A و B را شامل می‌شود.



$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

مثال: برای مجموعه‌های A و B با مجموعه مرجع U ثابت کنید که: $A \cap B \subseteq A$

اثبات:

$$\forall x ; (x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B) \Rightarrow x \in A$$

بنابراین داریم:

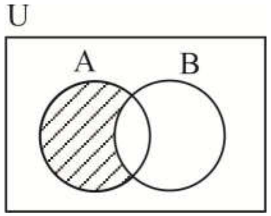
$$\forall x ; (x \in A \cap B \Rightarrow x \in A) \Rightarrow A \cap B \subseteq A$$

نکته: برای هر دو مجموعه دلخواه A و B داریم: $A \cap B \subseteq A \;,\; A \cap B \subseteq B$

تفاضل دو مجموعه:

تفاضل مجموعه B از مجموعه A که با $A-B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای شامل همه اعضای A است که متعلق به B نباشد.

$$A-B=\{x\in U \mid x\in A \wedge x\notin B\}$$



دو مجموعه مساوی:

فرض کنیم A و Bدو مجموعه با مجموعه مرجع U باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B و هـر عضـو B عضـوی از A باشد، یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$ در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم $A=B$. به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت:

$$A=B \Leftrightarrow [(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)]$$

مثال: فرض کنید $A=\{۱,۲\}$، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با A مساوی است؟

الف) $\{x\in\mathbb{Q} \mid x^۲-۳x+۲=۰\}$ ب) $\{x\in\mathbb{R} \mid ۱\le x\le ۲\}$ پ) $\{x\in\mathbb{Q} \mid ۲x^۲+۳x+۱=۰\}$ ت) $\{x\in\mathbb{N} \mid ۱\le x\le ۲\}$

مثال: فرض کنید A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع U باشند، ثابت کنید: $A\cap B=B\cap A$

اثبات: برای اثبات حکم باید درستی دو رابطه زیر را نشان دهیم:

$$\begin{cases} A\cap B\subseteq B\cap A \quad (۱) \\ , \\ B\cap A\subseteq A\cap B \quad (۲) \end{cases}$$

اثبات (۱): $\forall x;[x\in(A\cap B) \Rightarrow x\in A\wedge x\in B \Rightarrow x\in B\wedge x\in A \Rightarrow x\in B\cap A] \Rightarrow A\cap B\subseteq B\cap A$

اثبات (۲): $\forall x;[x\in(B\cap A) \Rightarrow x\in B\wedge x\in A \Rightarrow x\in A\wedge x\in B \Rightarrow x\in A\cap B] \Rightarrow B\cap A\subseteq A\cap B$

مثال: فرض کنیم A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع U باشند؛ ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ آن‌گاه $A - B = \varnothing$.

اثبات:

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\} \subseteq \underbrace{\{x \in U \mid x \in B, x \notin B\}}_{\varnothing} \Rightarrow A - B \subseteq \varnothing \quad (\text{زیرا } A \subseteq B)$$

و از آن‌جا که می‌دانیم $\varnothing \subseteq A - B$ ، در نتیجه $A - B = \varnothing$

مثال: فرض کنید A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع U باشند. ثابت کنید اگر $A \bigcup B = A \bigcap B$ آن‌گاه $A = B$.

اثبات: برای اثبات حکم باید درستی دو رابطه زیر را نشان دهیم: $A \subseteq B \;,\; B \subseteq A$

$$\forall x ; x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \bigcup B \xrightarrow{A \bigcup B = A \bigcap B} x \in A \bigcap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B$$

$$\forall x ; (x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subseteq B$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $B \subseteq A$ و در نتیجه $A = B$