

کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث ها

■ نسبت اجزای فرعی، محیط ها و مساحت های دو مثلث متشابه

قضیه: هرگاه دو مثلث، متشابه باشند، آنگاه نسبت اندازه های هر دو جزء متناظر (ارتفاع ها، میانه ها، نیمسازها و محیط ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت های آنها مساوی توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

به عنوان مثال اگر مثلث های $A'B'C'$ و ABC متشابه باشند و نسبت تشابه آنها k باشد (آنگاه $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$) :

الف) نسبت اندازه های ارتفاع های متناظر آنها k است :

$$\frac{A'H'}{AH} = k$$

ب) نسبت اندازه های میانه های متناظر آنها k است :

$$\frac{C'N'}{CN} = k$$

ج) نسبت اندازه های نیمسازهای متناظر آنها مساوی k است :

$$\frac{B'D'}{BD} = k$$

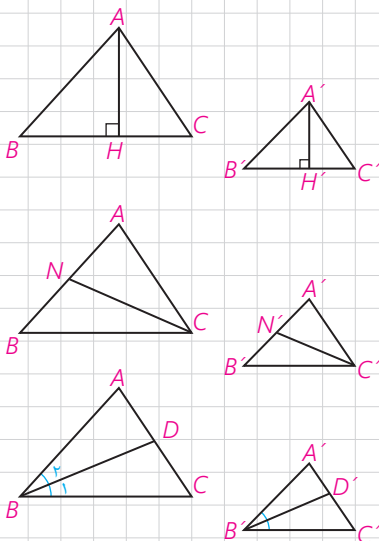
در مورد محیط های دو مثلث نیز داریم :

$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = \frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = k$$

و در مورد مساحت ها داریم :

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^2$$

اثبات: اگر درستی حکم را برای یکی از ارتفاع ها (میانه ها، نیمسازها) ثابت کنیم، درستی آن قابل تعمیم به سایر ارتفاع ها (میانه ها، نیمسازها) است. (چرا؟)



الف) ارتفاعها

فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' , \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$
حکم	$\frac{A'H'}{AH} = k$

چرا $\angle B = \angle B'$ بنابراین $\Delta ABH \sim \Delta A'B'H'$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه گیری کنید.

ب) میانه‌ها

فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' , \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$
حکم	$\frac{A'M'}{AM} = k$

چرا $\angle B = \angle B'$ ؟

$$\frac{B'M'}{BM} = \frac{\frac{1}{2} \dots}{\frac{1}{2} \dots} = \frac{\dots}{\dots} = k \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'M'}{BM}$$

بنابراین $\Delta A'B'M' \sim \Delta ABM$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه بگیرید.

ج) نیمسازها

فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' , \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$
حکم	$\frac{B'D'}{BD} = k$

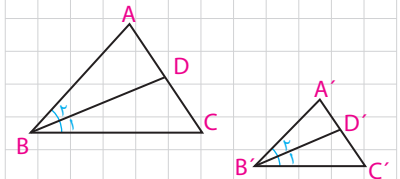
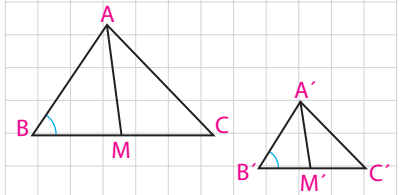
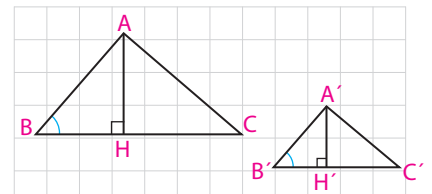
چرا $\angle A = \angle A'$ ، چرا $\angle B_p = \angle B'_p$ ؟
بنابراین $\Delta A'B'D' \sim \Delta ABD$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نشان دهید.

د) محیط‌ها

به سادگی و به کمک ویژگی تناسب‌ها می‌توان نوشت :

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k \Rightarrow$$

$$\frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = k \Rightarrow \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = k$$



مساحت‌ها

دیدیم که نسبت ارتفاع‌های نظیر، مساوی نسبت تشابه است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{A'H'}{AH} = \frac{B'C'}{BC} = k \quad \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A'H'.B'C'}{\frac{1}{2}AH.BC} = \frac{A'H'}{AH} \times \frac{B'C'}{BC} = k.k = k^2$$

کاردکلاس

چهارضلعی‌های متشابه $A'B'C'D'$ و $ABCD$ مفروض‌اند.

۱- اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، k باشد، ثابت کنید نسبت محیط‌های آنها مساوی k است.

۲- قطرهای AC و $A'C'$ را رسم کنید. نشان دهید:

$$\Delta ACD \sim \Delta A'C'D' \quad , \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

نسبت تشابه‌ها چیست؟

۳- جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}} = \dots, \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dots \Rightarrow \frac{S_{A'C'D'} + S_{A'B'C'}}{S_{ACD} + S_{ABC}} = \dots \Rightarrow \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

بنابراین نسبت مساحت‌های دو چهارضلعی، مساوی مربع نسبت تشابه آنهاست. به

همین ترتیب می‌توانیم نسبت محیط‌ها و مساحت‌های هر دو n ضلعی متشابه را به صورت زیر ثابت کنیم:

هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط‌های آنها، مساوی k و نسبت مساحت‌های آنها k^2 است.

مثال: محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع سه برابر محیط مثلث متساوی‌الاضلاع

دیگر است. مساحت مثلث بزرگ‌تر، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

حل: می‌دانیم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع همواره با هم متشابه‌اند (چرا؟) بنابراین

نسبت محیط‌های آنها، نسبت تشابه آنهاست، یعنی $k=3$ بنابراین: $\frac{S}{S'} = k^2 = 9$ یعنی مساحت مثلث بزرگ‌تر، ۹ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است.

هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند.



کاردرکلاس

۱- اندازه محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب 10° و 18° واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر 15 واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح است؟

۲- نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی متشابه، $\frac{4}{9}$ است. اگر محیط یکی از آنها 12 واحد باشد، محیط پنج‌ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

۳- اندازه‌های اضلاع یک هفت‌ضلعی را سه برابر می‌کنیم؛ بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت هفت‌ضلعی چند برابر می‌شود؟

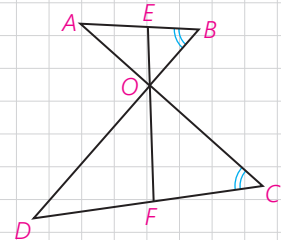
فعالیت

در شکل روبه‌رو $EF = 1 \text{ cm}$ و $\angle B = \angle C$ نیمساز دو زاویه متقابل به رأس O است و

الف) چرا مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند؟

ب) اگر $\frac{OB}{OC} = \frac{2}{3}$ ، نسبت $\frac{OE}{OF}$ چقدر است؟

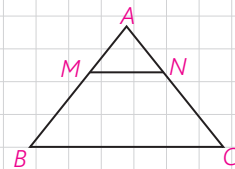
ج) طول‌های OE و OF را به‌دست آورید.



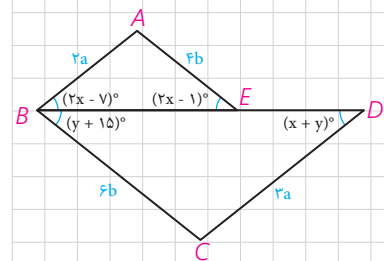
تمرین

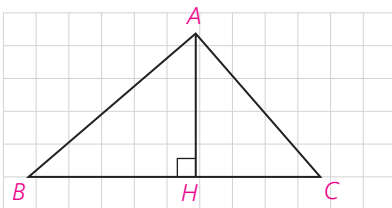
۱- طول‌های اضلاع یک مثلث 10° و 12 و 15 سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، 10° سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید.

۲- در شکل روبه‌رو $BC \parallel MN$ است و مساحت ذوزنقه $MNCB$ هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به‌دست آورید.



۳- در شکل روبه‌رو می‌دانیم $BE = 2DE$ است. اولاً x و y را به‌دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.





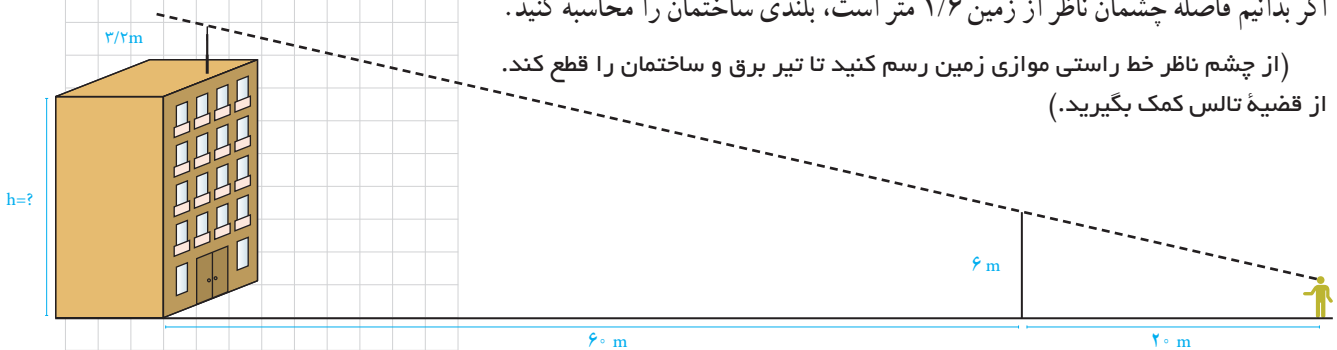
۴- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\angle A = 90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانید که $\triangle ABH \sim \triangle ABC \sim \triangle ACH$ است. با توجه به این موضوع،

الف) ثابت کنید:

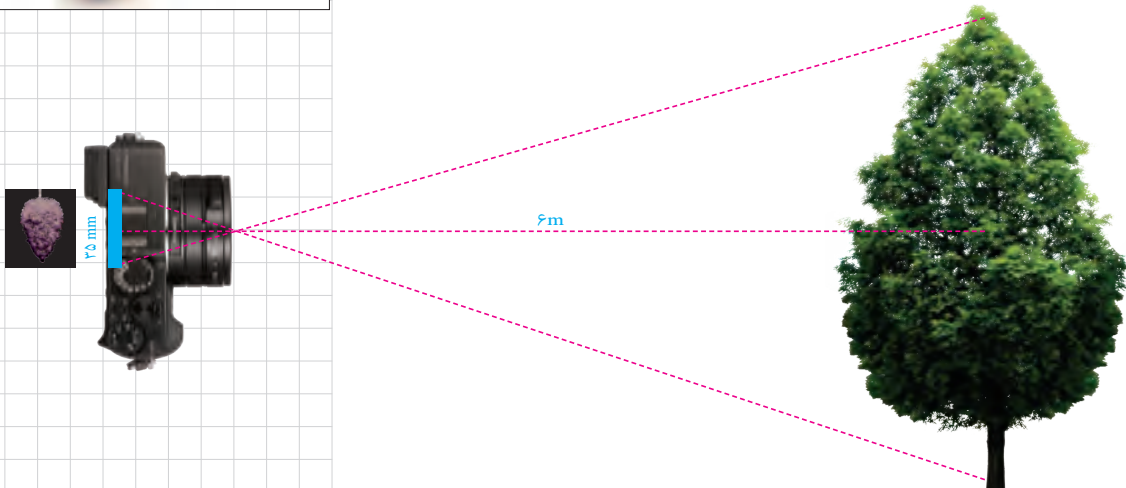
$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2, \quad \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامه کار، درستی قضیه فیثاغورس را نتیجه‌گیری کنید.

۵- مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع $\frac{3}{2}$ متر نصب شده است. در فاصله 60 متری ساختمان، یک تیر برق 6 متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله 20 متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند. اگر بدانیم فاصله چشم ناظر از زمین $\frac{1}{6}$ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید. (از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیه تالس کمک بگیرید.)

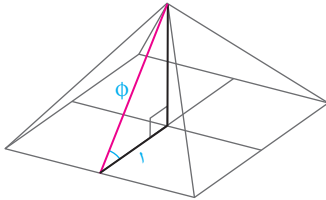
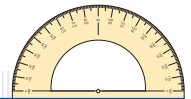


۶- در دوربین‌های قدیمی، موقع عکس‌برداری، روی یک حلقه فیلم تعداد محدودی (مثلاً سی و شش عدد) تصویر منفی^۱ ثبت، و سپس این فیلم ظاهر می‌شود و عکس‌ها از روی آن چاپ می‌شوند. اگر فرض کنیم عرض یکی از این فیلم‌ها، 35mm و فاصله آن درون دوربین تا عدسی^۲، $4/2\text{cm}$ و فاصله عدسی تا درختی که از آن عکس می‌گیرد، 6m باشد، اندازه واقعی درختی که از آن عکس گرفته می‌شود، چند متر است؟

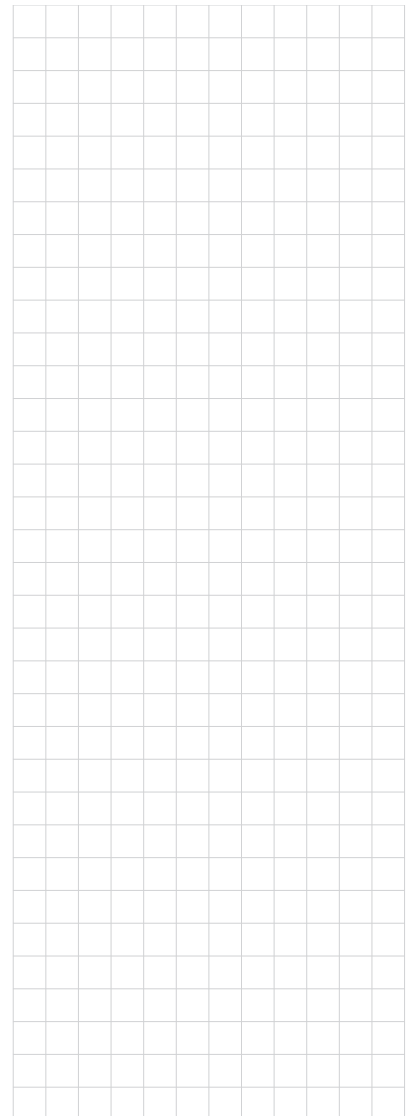


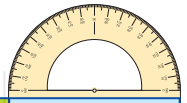
۱- واژه «تصویر منفی» با تصویب فرهنگستان به جای واژه «نگاتیو» به کار رفته است.

۲- واژه «عدسی» با تصویب فرهنگستان به جای واژه «لنز» به کار رفته است.



اعداد فیثاغورسی به سه عددی می گویند که مجموع مربع های دو تا از آنها برابر با مربع سوم می باشد؛ به عبارتی اعداد a ، b و c را فیثاغورسی گویند، هرگاه $a^2 = b^2 + c^2$. اعداد فیثاغورسی اندازه های ضلع های یک مثلث قائم الزاویه (راست گوشه) را تشکیل می دهند. بررسی ها نشان داده است که در برخی نقاط جهان در ساخت بناها پیش از شناخت قضیه فیثاغورس از ویژگی اعداد فیثاغورسی استفاده می شده است.





اثبات ویژگی های تناسب

۱ طرفین - وسطین کردن؛ طرفین تساوی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را در عدد غیر صفر bd ضرب کنید :

$$\frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd \Rightarrow ad = bc$$

۲ ویژگی های (۲) و (۳) با طرفین - وسطین کردن، به سادگی نتیجه می شوند :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow da = cb \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow bc = ad \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

۳ ویژگی های ۵ و ۴ به صورت زیر با اضافه یا کم کردن عدد ۱ به دو طرف تناسب نتیجه می شوند :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

ویژگی های تفذیل نسبت در صورت و مخرج را خودتان اثبات کنید.

۴ اثبات ویژگی ۶ :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk, c = dk \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

به همین ترتیب می توان تعمیم این ویژگی را هم اثبات کرد.