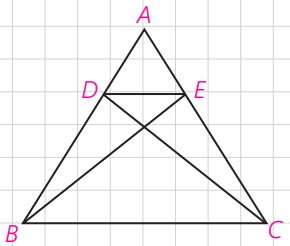
درس دوم

قضیهٔ تالس

در شکل مقابل خط DE موازی ضلع BC رسم شده است. مثلث‌های DAE و DEC در رأس D مشترک‌اند. قاعده‌های مقابل به این رأس کدام‌اند؟ با توجه به نتیجهٔ ۲ از درس اول، تناسب‌های زیر را کامل کنید :



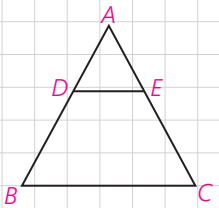
$$\frac{S_{DAE}}{S_{DEC}}=\frac{\cdots}{\cdots}\,,\ \frac{S_{ADE}}{S_{DBE}}=\frac{\cdots}{\cdots}$$

مثلث‌های DBE و DEC هم‌مساحت‌اند (چرا؟) با توجه به این موضوع از تساوی‌های بالا تناسب زیر را نتیجه‌گیری کنید :

$$\frac{AE}{\cdots}=\frac{\cdots}{DB}$$

بنابراین قضیه زیر را اثبات کردیم :

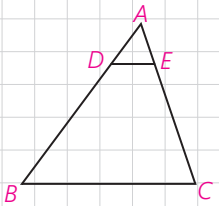
قضیهٔ تالس: هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آنها تشکیل یک تناسب را می‌دهند. به طور خلاصه هرگاه مانند شکل روبه‌رو داشته باشیم $DE\|BC$، آنگاه:



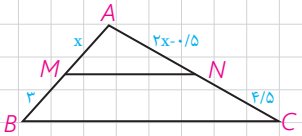
$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

کار در کلاس

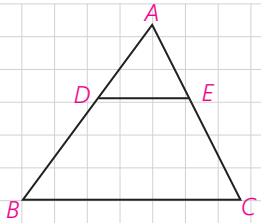
۱ــ در شکل مقابل $DE\|BC$ و $AD=۱$ و $DB=۳$ و $AE=۰/۸$. به کمک قضیهٔ تالس طول AC را به‌دست آورید.



۲ــ در شکل مقابل $MN\|BC$؛ به کمک قضیهٔ تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به‌دست آورید.

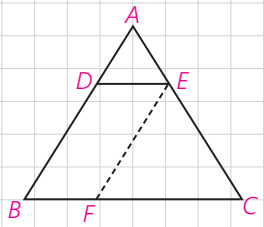


۳ــ در شکل مقابل $DE \| BC$؛ تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطهٔ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ و با تفضیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطهٔ $\frac{DB}{AB}=\frac{CE}{AC}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.



فعالیت ۱

در شکل مقابل $DE \| BC$، از نقطهٔ E، پاره‌خط EF را موازی AB رسم کرده‌ایم. چهارضلعی DEFB چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟



با توجه به این موضوع داریم :

$DE=\dots \quad , \quad DB=\dots$

در مثلث ABC و با درنظرگرفتن $DE \| BC$، قضیهٔ تالس را بنویسید.

$$\frac{AD}{\dots}=\frac{\dots}{AC} \quad (۱)$$

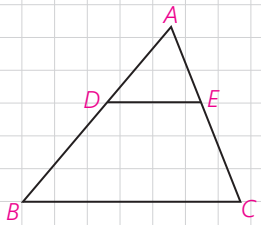
در مثلث CAB با توجه به $EF \| AB$، قضیهٔ تالس را بنویسید.

$$\frac{BF}{BC}=\frac{\dots}{\dots} \quad (۲)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) و جای‌گذاری DE به جای BF خواهیم داشت :

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

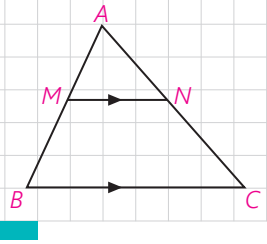
تعمیم قضیهٔ تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:



$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

کار در کلاس

در شکل مقابل، با فرض $MN \| BC$، طبق قضیهٔ تالس داریم : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ حال عکس قضیهٔ تالس را به زبان ریاضی بنویسید.



$\Rightarrow$

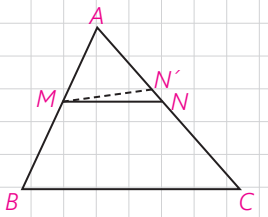
عکس قضیهٔ تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظراً متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

اثبات با برهان خلف است. در شکل می‌دانیم :

$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ ، فرض کنیم بر خلاف حکم $MN \nparallel BC$ ، پس از نقطهٔ M پاره‌خط MN' را موازی BC رسم می‌کنیم. حال با توجه به قضیهٔ تالس داریم :

$$MN' \parallel BC \Rightarrow \frac{AN'}{AC}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

از مقایسهٔ این تناسب، با فرض مسئله نتیجه می‌شود $\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$ و درنتیجه : $AN'=AN$ و بنابراین N بر N' منطبق است و MN همان MN' است که موازی BC است.



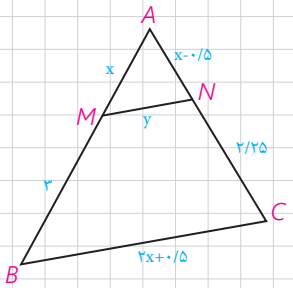
مثال : در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است، مقادیر x و y را به دست آورید.

حل : با توجه به قضیه تالس و تعمیم آن داریم :

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{۳}=\frac{x-۰/۵}{۲/۲۵} \Rightarrow$$

$$۲/۲۵x=۳x-۱/۵ \Rightarrow ۰/۷۵x=۱/۵ \Rightarrow x=۲$$

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{y}{۴/۵} \Rightarrow y=۱/۸$$



تمرین

۱ــ در شکل مقابل پاره‌خط MN موازی با BC رسم شده است. درستی و نادرستی هر عبارت را مشخص کنید :

الف) $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{MN}{BC}$

ب) $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

پ) $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$

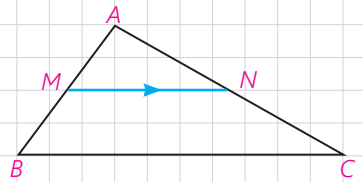
ت) $\frac{AM}{BM}=\frac{MN}{BC}$

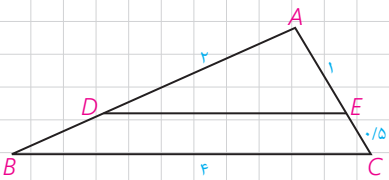
ث) $\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{CA}=\frac{MN}{BC}$

ج) $\frac{MB}{MA}=\frac{NC}{NA}$

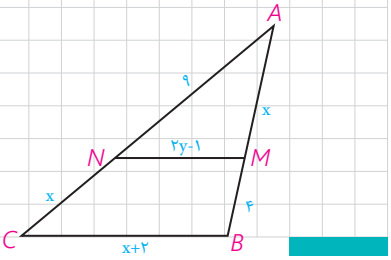
چ) $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

ح) $\frac{MB}{AB}=\frac{MN}{BC}$

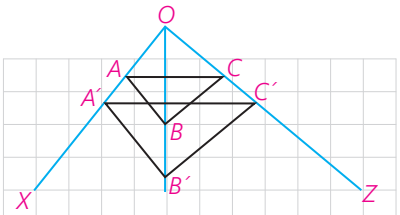




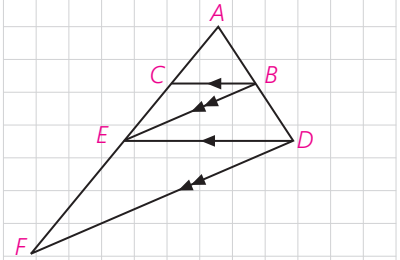
۲ــ در شکل مقابل $DE \parallel BC$؛ باتوجه به اندازه پاره‌خط‌ها، طول‌های DE و AB را به‌دست آورید.



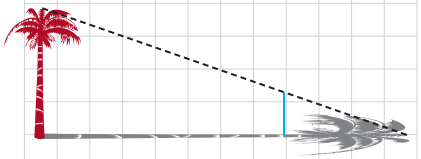
۳ــ در شکل مقابل $MN \parallel BC$؛ مقادیر x و y را به‌دست آورید.



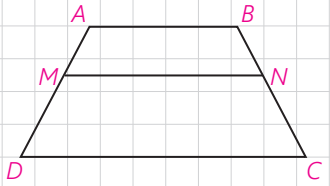
۴ــ در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیهٔ تالس و عکس آن ثابت کنید : $AC \parallel A'C'$



۵ــ در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$، به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسهٔ تناسب‌ها با یکدیگر، ثابت کنید : $AE^2 = AC \cdot AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)



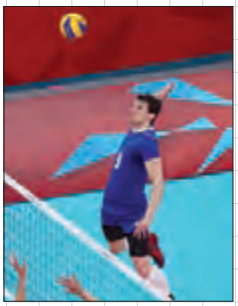
۶ــ یکی ازکاربردهای قضیهٔ تالس از زمان‌های دور تاکنون، محاسبهٔ فاصله‌های غیرقابل دسترس بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایهٔ درخت را روی زمین اندازه می‌گیریم؛ سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایهٔ آن روی امتداد سایهٔ درخت قرار گیرد و نوک سایهٔ شاخص نیز بر نوک سایهٔ درخت منطبق شود؛ به‌طور مثال اگر طول سایهٔ درخت ۶۰ متر، طول سایهٔ شاخص ۳ متر و طول شاخص ۱ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟

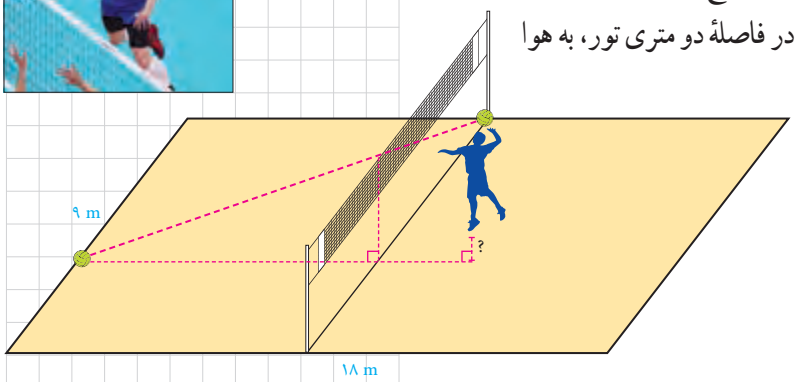


۷ــ در ذوزنقه مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید :

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$ (قضیه تالس در ذوزنقه)

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)





۸ــ ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع ۹×۹ تفکیک می‌شود و تور والیبال مردان با ارتفاع ۲/۴۳ متر روی خط وسط نصب شده‌است. یک بازیکن با قد ۱۸۰ سانتی‌متر و در فاصلهٔ دو متری تور، به هوا می‌پرد و توپی را که در ارتفاع ۳۰ سانتی‌متری بالای سرش است با ضربه آبشار مماس بر تور وسط روانه زمین حریف می‌کند و توپ روی خط انتهای زمین حریف می‌نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده است؟