فصل دوم

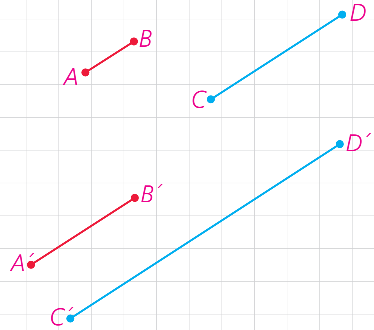
قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

درس اول

نسبت و تناسب در هندسه

با نسبت و تناسب آشنایی دارید و ویژگی اصلی آن، یعنی برابری حاصل‌ضرب طرفین و وسطین را می‌شناسید؛ یعنی می‌دانید که اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(b,d\neq ۰)$ آنگاه $ad=bc$ و برعکس؛ از تساوی $xy=zt$ با شرط $t,y\neq ۰$ تناسب $\frac{x}{t}=\frac{z}{y}$ نتیجه می‌شود. نسبت اندازه‌های دو پاره‌خط در هندسه هم به همین صورت تعریف می‌شود به شرطی که هر دو با یک واحد اندازه‌گیری بیان شده باشند؛ مثلاً اگر AB پاره‌خطی به طول ۲cm و CD پاره‌خطی به طول ۵cm باشد، $\frac{AB}{CD}=\frac{۲}{۵}$. حال فرض کنید $A'B'=۴cm$ و $C'D'=۱۰cm$، در این صورت :

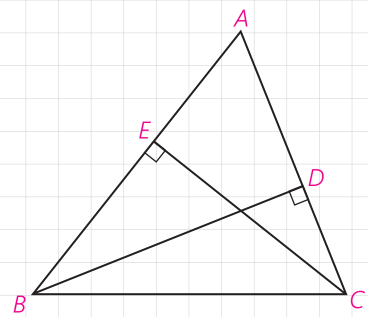
$$\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$



و بنابراین یک تناسب به‌صورت $\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD}$ درست می‌شود. بدیهی است که اگر نسبت AB به CD، $\frac{۲}{۵}$ باشد، نسبت CD به AB، $\frac{۵}{۲}$ است.

فعالیت ۱

مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با درنظرگرفتن قاعدهٔ AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظرگرفتن قاعدهٔ AB بنویسید.



مساحت ABC $=\frac{۱}{۲}AC\times$ ______

مساحت ABC $=\frac{۱}{۲}$ ______ $\times$ ______

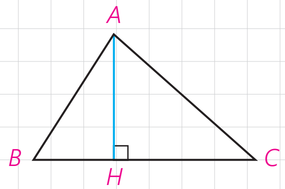
ــ عبارت‌های سمت راست، هر دو مساوی یک چیزند.

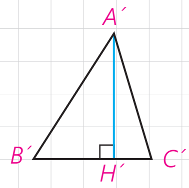
بنابراین : ______ $\times$ ______ $=$ ______ $\times AC$ آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب بنویسید؟

پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. آیا همه به یک جواب رسیده‌اید؟ تفاوت پاسخ‌ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟

با توجه به فعالیت صفحهٔ قبل، جای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ______ وارد بر آنها برابر است.





فعالیت ۲

در شکل مقابل ارتفاع‌های AH و $A'H'$ در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ هم‌اندازه‌اند ($AH = A'H'$)

با پرکردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجهٔ زیر را به‌دست آورید.

S_{ABC} = مساحت ABC = $\frac{۱}{۲}\cdots\times\cdots$

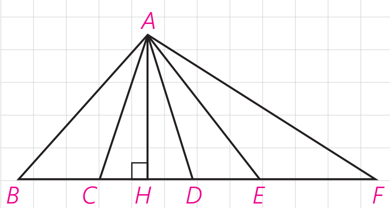
$$S_{A'B'C'} = \frac{۱}{۲}\cdots\times\cdots$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{۱}{۲}\cdots\times\cdots}{\frac{۱}{۲}\cdots\times\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

نتیجه ۱

هرگاه اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آنها وارد شده است.

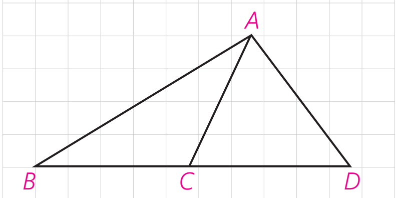
کاردرکلاس



در شکل مقابل مثلث‌های ABC، ACD، ADE و AEF را که در رأس A مشترک‌اند، در نظر بگیرید. ارتفاع متناظر با رأس A، در همهٔ این مثلث‌ها کدام پاره‌خط است؟

با توجه به نتیجهٔ فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید:

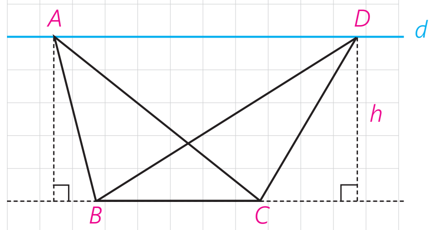
$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\cdots}{\cdots} \qquad \frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} = \frac{\cdots}{\cdots} \qquad \frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \frac{\cdots}{\cdots}$$



نتیجه ۲

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}=\frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD}=\frac{BC}{CD}$$



کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعدهٔ BC در مثلث‌های DBC و ABC با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟

نتیجه ۳

اگر دو مثلث، قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های ABC، DBC هم‌مساحت‌اند.

ویژگی‌های تناسب

به کمک اعمال و روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت. مهم‌ترین این ویژگی‌ها به شرح زیر است (اثبات درستی این ویژگی‌ها را در مجلهٔ ریاضی انتهای فصل می‌توانید ببینید)

(طرفین وسطین کردن)	b و $d \neq ۰$	$\frac{۳}{۵}=\frac{۶}{۱۰} \Leftrightarrow ۳\times۱۰=۵\times۶$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$	۱
(معکوس کردن طرفین تناسب)	a و b و c و $d \neq ۰$	$\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \frac{۵}{۲}=\frac{۱۰}{۴}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	۲
(تعویض جای طرفین یا وسطین)	a و b و c و $d \neq ۰$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۶}{۹} \Rightarrow \frac{۹}{۳}=\frac{۶}{۲}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$	۳
(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)	b و $d \neq ۰$	$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$	۴
(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)	b و $d \neq ۰$	$\frac{۳۰}{۲۱}=\frac{۲۰}{۱۴} \Rightarrow \frac{۹}{۲۱}=\frac{۶}{۱۴}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$	۵
	b و $d \neq ۰$	$\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۱۲} \Rightarrow \frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۴}{۶}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	۶

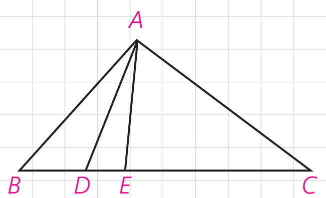
(تعمیم ویژگی۶)	$b_۱$ و $b_۲$ و ... و $b_n \neq ۰$	۷ $\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\cdots=\frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{b_۱+b_۲+\cdots+b_n}$ $\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲} \Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲+۴+۶+۸}{۳+۶+۹+۱۲}=\frac{۲۰}{۳۰}$

تعریف واسطهٔ (میانگین) هندسی: اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد؛ یعنی $\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$ یا $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ با طرفین وسطین‌کردن تناسب، نتیجه می‌شود: $b^۲=ac$. در این صورت b را واسطهٔ هندسی a و c می‌نامیم. مثلاً اگر دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۹ واحد داشته باشیم، پاره‌خطی که ۶ واحد طول دارد، واسطهٔ هندسی بین آنهاست (چرا؟)

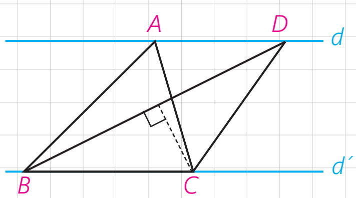
تمرین

۱ــ اگر $\frac{۳}{۵}=\frac{z}{۶}=\frac{y}{۳}=\frac{x}{۲}$ حاصل $x+y+z$ را به‌دست آورید.

۲ــ طول پاره‌خطی را به‌دست آورید که واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.



۳ــ در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به‌دست آورید.



۴ــ در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، $۸cm^۲$ است. اگر $BD=۶cm$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ C از BD را به‌دست آورید.