

بسیاری از نتایج ریاضی، طی چنین مراحل توسط علاقه‌مندان به ریاضی به دست آمده است. مراحل این روند و حتی حدس‌ها و تفکراتی که درست نیست اما در این مراحل صورت می‌گیرد، می‌تواند موجب ارتقای تفکر ریاضی شود.

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «**عکس قضیه**» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

به طور مثال عکس قضیه ۱ به صورت زیر است :

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

فرض: $\hat{C} < \hat{B}$
حکم: $AB < AC$

مثال:

قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهاش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال:

قضیه: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

فرض: $AB = AC$

حکم: $BH = CH'$

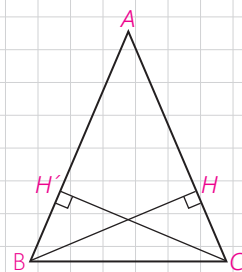
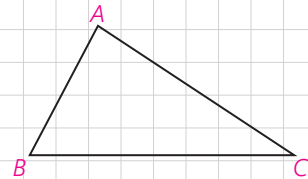
عکس قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH = CH'$

حکم: $AB = AC$

در واقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض، که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جابه‌جا می‌شود؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC و ارتفاع بودن BH و CH' در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات است.

عکس قضیه ۱ در صفحات بعد اثبات شده است.



گزاره یک جمله خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هرکدام یک گزاره ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک گزاره مرکب است.

مثال :

الف) جمله‌های زیر گزاره‌اند :
 - مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° درجه است.
 - $3 < 2$

ب) جمله‌های زیر گزاره نیستند :
 - آیا فردا هوا بارانی است؟
 - چه هوای خوبی!
 - کتابت را مطالعه کن.

نقیض یک گزاره : همان‌طور که گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال :

الف) گزاره : «a از b بزرگ‌تر است.»
 نقیض آن : «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با «a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با «a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است.»
 ب) گزاره : «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.»
 نقیض آن : «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.» که معادل است با «مثلی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»
 پ) گزاره : «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی اش 360° نیست.»
 نقیض : «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی اش 360° نیست.» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی اش 360° است.»
 در برخی گزاره‌ها به جای اینکه درباره چیزی خبری قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌شود؛ مثلاً «اگر باران بیارد، مسابقه برگزار نخواهد شد.» به چنین گزاره‌هایی، گزاره‌های شرطی می‌گویند.

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، **برهان غیرمستقیم** یا **برهان خلف** است. بدین صورت که به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک گزاره غلط یا غیرممکن می‌رسیم. در این حالت نتیجه می‌گیریم که فرض غلط بودن حکم نادرست بوده و حکم نمی‌تواند غلط باشد.

مثال: از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

فرض: نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.

حکم: از نقطه A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

استدلال: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم از نقطه A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از 180° خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطه غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.

حال می‌خواهیم درستی عکس قضیه ۱ را با برهان غیرمستقیم ثابت کنیم.

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویه بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر.

برای واضح شدن مسئله و کمک به حل آن، شکل مثلث را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن فرض و حکم را می‌نویسیم.

فرض: $\hat{A} > \hat{B}$

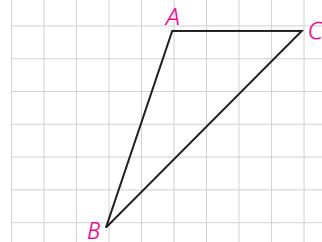
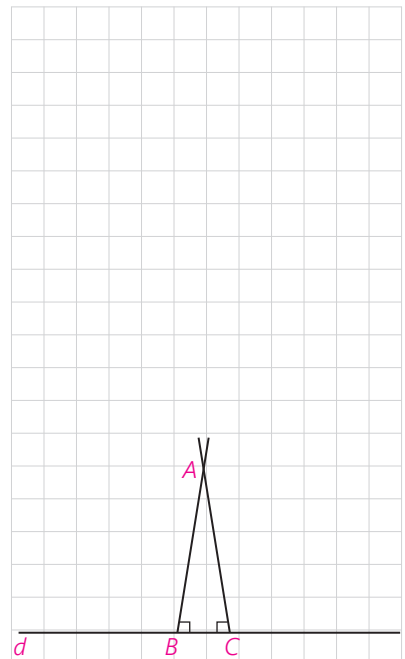
حکم: $BC > AC$

اثبات: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم _____ باشد. بنابراین باید _____ یا _____.

هر دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر دو حالت به تناقض منجر می‌شود.

حالت اول: اگر $BC < AC$ باشد، طبق قضیه ۱ باید _____ که با فرض در تناقض است.

حالت دوم: اگر $BC = AC$ باشد، $\triangle ABC$ یک مثلث _____ خواهد بود و می‌دانیم در این حالت باید $\hat{A} = \hat{B}$ باشد که در تناقض با فرض است. لذا هر دو حالت $BC < AC$ و $BC = AC$ غیرممکن‌اند؛ بنابراین $BC > AC$ است و حکم درست است.



■ قضیه‌های دوشرطی

همان گونه که دیدیم، قضیه ۱ و عکس آن هر دو درست است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم که :

اگر در مثلثی، دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر، و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را «قضیه‌های دوشرطی» می‌نامیم.

قضیه‌های دوشرطی را می‌توان با نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم $\triangle ABC$ یک مثلث باشد



$$BC > AB \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} > \hat{C}$$

مثال : در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند؛ اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آنها با هم برابر باشند.

■ مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شده‌اید، استدلال با مثال نقض است. گاهی در برخی موضوعات (چه ریاضی و چه غیرریاضی) یک حکم به‌صورت کلی بیان می‌شود؛ بدین صورت که در مورد تمام اعضای یک مجموعه یک حکم بیان می‌شود. موارد زیر نمونه‌هایی از حکم‌های کلی است :

(الف) «همهٔ اعداد صحیح، مثبت‌اند.» (حکمی کلی در مورد تمام اعداد صحیح)

(ب) «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» (حکم کلی در مورد

تمام چهارضلعی‌هایی که چهار ضلع برابر دارند)

(پ) «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.» (حکم کلی در مورد

تمام چهارضلعی‌های محدب)

(ت) «به‌ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.» (حکم کلی

در مورد تمام اعداد طبیعی)

حدس خود را دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم کلی «الف» بنویسید. چگونه می‌توانید درستی حدس خود را ثابت کنید؟

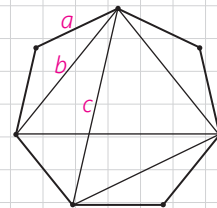
می‌دانیم که (-2) یک عدد صحیح و منفی است؛ بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ

همین مثال رد می‌شود. به چنین مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، **مثال نقض** گفته می‌شود. درباره‌ی درستی یا نادرستی «ب» چه می‌توانید بگویید؟

اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیاوریم، درباره‌ی درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در موارد (پ) و (ت) می‌توانید مثال نقض پیدا کنید؟

آیا اگر در مورد یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض پیدا کنیم، باید درستی آن حکم کلی را نتیجه‌گیری کنیم؟ در مورد (پ) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش حکم کلی (پ) کافی نیست و باید توجه کرد که «برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید اثبات ارائه کنیم.» درباره‌ی گزینه (ت) چه می‌توان گفت؟

اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیابیم، نمی‌توان درباره‌ی درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه‌ای گرفت.



کاردکلاس

۱- در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصله هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، به دست می‌آید».

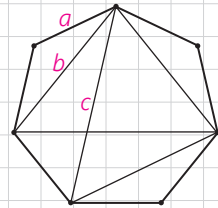
۲- آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعه A و B ، یا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.

تمرین

۱- می‌دانیم که از یک نقطه خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.



۲- با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

۳- گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

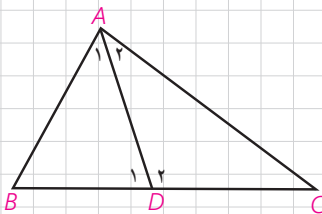
ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۴- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

پ) مثلثی با دو زاویه قائمه وجود ندارد.



۵- عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دشرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهاش عمود منصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

۶- فرض کنیم ABC مثلثی دلخواه و AD نیمساز زاویه A باشد. دلایل هر یک از نتایج زیر را بنویسید و نتیجه نهایی که در پایان آمده است را کامل نمایید.

الف) $\hat{D}_2 > \hat{A}_1$ ، زیرا _____ .

ب) $\hat{D}_2 > \hat{A}_2$ ، زیرا _____ .

پ) $AC > DC$ ، زیرا _____ .

ت) با روندی مشابه سه قسمت قبل نشان دهید: $AB > BD$

ث) حال نشان دهید: $AB + AC > BC$

نتیجه: در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازه _____ ، _____ است.

