



نمونه سوالات فصل سوم هندسه یازدهم

گرفتن با
فیلمو مدرسه
راحت‌ه!

۲۰

FilimoSchool.com

- ویدیوهای آموزشی
- معلم خصوصی
- خلاصه درس و جزوه
- سوالات تستی و تشریحی

حاده (تند)، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه ی A را در هر یک از مثلث های زیر تعیین کنید.

الف) $BC = 9$, $AC = 6$, $AB = 10$

ب) $BC = 9$, $AC = 4$, $AB = 8$

پ) $BC = 17$, $AC = 15$, $AB = 8$

۱

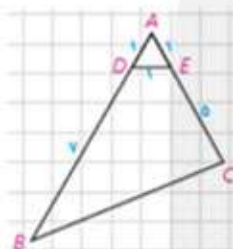


در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی متر، نقطه ای که از اضلاع به طول های ۵ و ۶، به فاصله ی ۲ و ۳ سانتی متر است از ضلع بزرگ تر چه فاصله ای دارد؟

۲



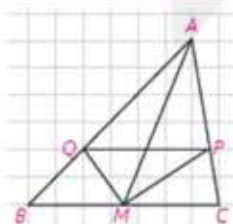
در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.



۳



در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$

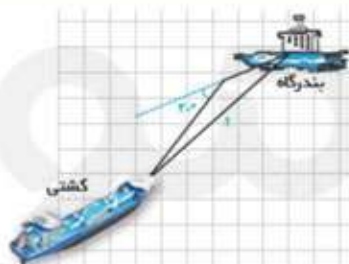


۴



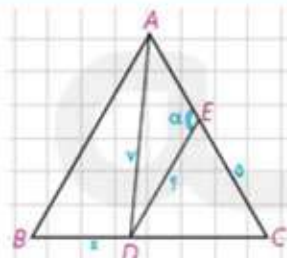
در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه ی D، که به فاصله ی ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله ای دارد؟ ($CD > BD$)

۵



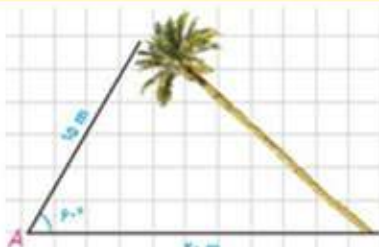
یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با 30° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می گیرد. فاصله ی بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

۶



در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه ی D، که به فاصله ی ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله ای دارد؟ ($CD > BD$) نقطه ی E، که به فاصله ی ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله ای است؟ اندازه ی زاویه ی AED چند درجه است؟

۷



یک درخت کج از نقطه ی A روی زمین، که در فاصله ی ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه ی 60° دیده می شود. اگر فاصله ی A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:
الف) طول درخت
ب) سینوس زاویه ای که درخت با سطح زمین می سازد.
پ) فاصله ی نوک درخت از زمین

۸

۹

در مثلث ABC میانه AM و نیمسازهای دو زاویه AMB و AMC را رسم کنید، این دو نیمساز، اضلاع AB و AC را قطع می کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازیند.

فیلیمو مدرسه

۱۰

سه ضلع مثلثی ۸، ۱۲، ۱۵ سانتی مترند. اندازه ی پاره خطهایی که نیمساز درونی زاویه ی بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می آورد، را تعیین کنید.

فیلیمو مدرسه

۱۱

نقطه ی A به فاصله ی $2\sqrt{6}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطه ی A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطه ی A' می نامیم. نقطه ی A را حول نقطه ی A' به اندازه ی ۱۲۰ درجه دوران می دهیم تا نقطه ی A'' حاصل شود. طول پاره خط AA'' را محاسبه کنید.

فیلیمو مدرسه

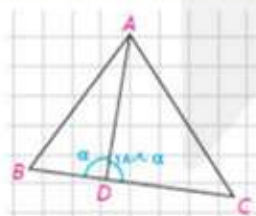
۱۲

ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ی $ABC (\hat{A} = 90^\circ)$ با ارتفاع $h_a = AH$ داریم:

$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

فیلیمو مدرسه

۱۳



در مثلث ABC، نقطه ی دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه ی کسینوس ها در دو مثلث ADC و ADB درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

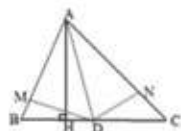
$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

(قضیه ی استوارت) به کمک قضیه ی استوارت، درستی قضیه ی میانه ها را نتیجه گیری کنید.

فیلیمو مدرسه

۱۴

در مثلث ABC، AH ارتفاع و AD نیمساز است. مساحت مثلث ABD و ACD را به ترتیب با S و S' نشان می دهیم.



(الف) با در نظر گرفتن BD و DC به عنوان قاعده ی این مثلثها، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.

(ب) از D عمودهایی بر اضلاع AB و AC رسم کنید و پای آنها را M و N بنامید. DM و DN چه رابطهای با هم دارند؟

(پ) با در نظر گرفتن AB و AC به عنوان قاعده ی مثلثهای ABD و ADC، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.

از مقایسه ی نسبتها در بند (الف) و (ب) چه نتیجه ای می گیرید؟

فیلیمو مدرسه

۱۵

به کمک قضیه ی کسینوس ها ثابت کنید در مثلث ABC:

(الف) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$

(ب) $\hat{A} < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$

(پ) $\hat{A} > 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$

الف) $a = 9$, $b = 6$, $c = 10$

$$a^2 = 81, b^2 + c^2 = 136 \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

ب) $a = 9$, $b = 4$, $c = 8$

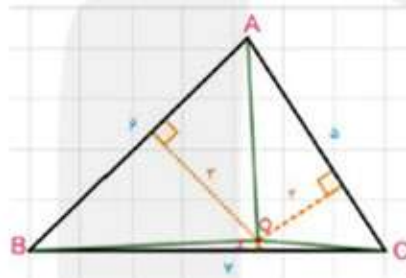
$$a^2 = 81, b^2 + c^2 = 80 \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

پ) $a = 17$, $b = 15$, $c = 8$

$$a^2 = 289, b^2 + c^2 = 289 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

۱

فیلیمو مدرسه



فاصله ی O تا ضلع بزرگتر را x در نظر می گیریم. داریم:

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$$

$$P_{ABC} = \frac{5+6+7}{2} = 9$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{9 \times 2 \times 3 \times 4} = 6\sqrt{6}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 9$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$$

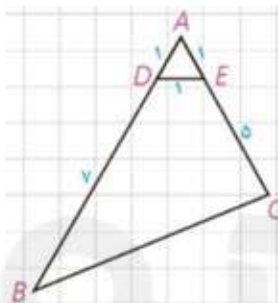
$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \times 7 \times x = \frac{7}{2}x$$

$$6\sqrt{6} = 9 + 5 + \frac{7}{2}x \Rightarrow 6\sqrt{6} - 14 = \frac{7}{2}x \Rightarrow x = \frac{2}{7}(6\sqrt{6} - 14) \approx 0.7$$

۲

فیلیمو مدرسه

با توجه به این که مثلث ADE متساوی الساقین است پس $\hat{DAE} = 60^\circ$ در نتیجه:



$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$$

$$BC^2 = 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2} = 52$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{13}$$

$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{BCED} = 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{47}{4}\sqrt{3}$$

۳

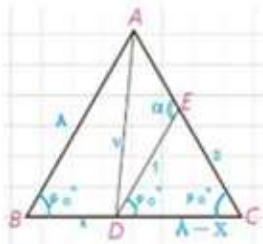
فیلیمو مدرسه

در مثلث AMB پاره خط MQ نیمساز زاویه $\hat{AMB}$ و در مثلث AMC پاره خط MP نیمساز زاویه $\hat{AMC}$ است. پس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB} \\ \frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC}$$

عکس قی تالس $\rightarrow PQ \parallel BC$

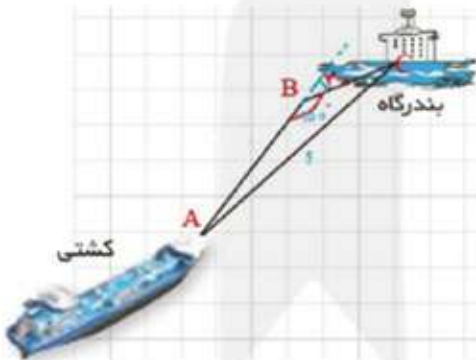
۴



$$\begin{aligned} AB = AC = BC = 10, AD = 7, DB = x \\ DC = 10 - x, DB < DC \\ AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC \\ \Rightarrow 64(10 - x) + 64x = 49 \times 10 + 10x(10 - x) \\ \Rightarrow 64 \times 10 - 64x + 64x = 49 \times 10 + 10x(10 - x) \end{aligned}$$

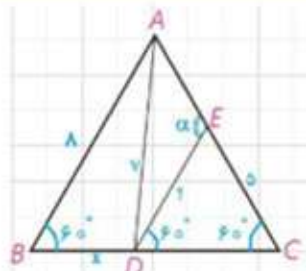
$$\begin{aligned} \Rightarrow 640 - 64x + 64x = 490 + 100x - 10x^2 \\ \Rightarrow 150 = 100x - 10x^2 \\ \Rightarrow 15 = 10x - x^2 \\ \Rightarrow x^2 - 10x + 15 = 0 \\ \Rightarrow (x - 3)(x - 5) = 0 \\ \Rightarrow x = 3, x = 5 \\ \text{DB} < \text{DC} \\ \Rightarrow x = \text{DB} = 3, \text{DC} = 5 \end{aligned}$$

۵



$$\begin{aligned} AB = 60 \times 1 = 60 \text{ km}, BC = 20 \times 0.5 = 20 \text{ km} \\ AC^2 = 60^2 + 20^2 - 2 \times 60 \times 20 \times \cos 150^\circ \\ = 3600 + 400 - 2 \times 1200 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \Rightarrow AC^2 = 4000 + 1200\sqrt{3} = 400(10 + 3\sqrt{3}) \\ \Rightarrow AC = 20\sqrt{10 + 3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

۶

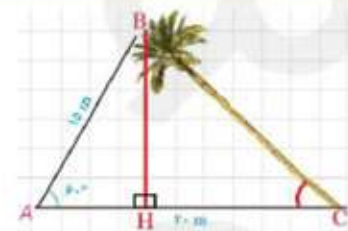


$$\begin{aligned} 7^2 = x^2 + 10^2 - 2 \times x \times 10 \times \cos 60^\circ \Rightarrow 49 = x^2 + 64 - 10x \\ \Rightarrow x^2 - 10x + 15 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 5, x = 3 \\ \text{BD} < \text{DC} \\ \Rightarrow \text{BD} = 3, \text{DC} = 5 \end{aligned}$$

۷

در نتیجه مثلث DCE متساوی الساقین است و چون یک زاویه 60° دارد پس متساوی الاضلاع است یعنی $DE = 5$. در مثلث DCE زاویه α یک زاویه خارجی است پس:

$$\alpha = 60^\circ + 60^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$



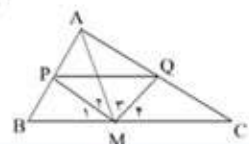
$$\begin{aligned} \text{الف) } a^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \times 20 \times 15 \times \cos 60^\circ \\ 400 + 225 - 300 \Rightarrow a^2 = 325 \Rightarrow a = 5\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \frac{5\sqrt{13}}{\sin 60^\circ} = \frac{15}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{15 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{5\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \approx 0.77$$

$$\text{ب) } \sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{15} \Rightarrow BH = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

۸

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AMB} : \text{نیمساز } MP \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AM}{MB} \\ \widehat{AMC} : \text{نیمساز } MQ \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{MC} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{MB = MC} \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{QC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \parallel BC$$

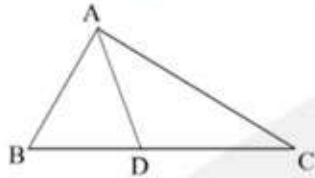


۹

فرض کنید $AB = 8$ و $AC = 12$ و $BC = 15$ و نیمساز زاویه A ضلع BC را در نقطه D قطع کند.

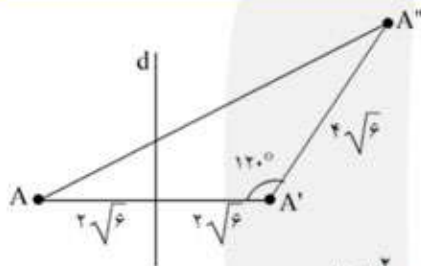
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{8}{12} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BD}{BD+DC} = \frac{8}{8+12} \Rightarrow \frac{BD}{15} = \frac{8}{20} \Rightarrow BD = 6$$

$$DC = BC - BD \quad DC = 15 - 6 = 9$$



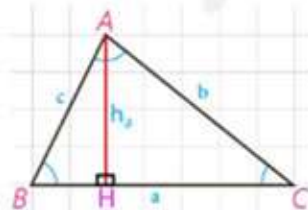
۱۰

بنا بر فرض سؤال، شکل زیر را داریم و برای آن قضیه کسینوس‌ها را می‌نویسیم:



$$AA''^2 = (2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{6})^2 - 2 \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} \times \cos 120^\circ \Rightarrow AA'' = \sqrt{288}$$

۱۱

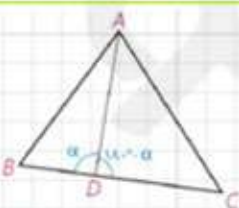


$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc \\ S &= \frac{1}{2}a \cdot h_a \end{aligned} \right\} \Rightarrow bc = ah_a \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} (bc)^2 = (ah_a)^2 \Rightarrow b^2c^2 = a^2h_a^2$$

$$\Rightarrow b^2c^2 = (b^2 + c^2)h_a^2 \Rightarrow b^2c^2 = b^2h_a^2 + c^2h_a^2 \xrightarrow{\div b^2c^2h_a^2}$$

$$\frac{b^2c^2}{b^2c^2h_a^2} = \frac{b^2h_a^2}{b^2c^2h_a^2} + \frac{c^2h_a^2}{b^2c^2h_a^2} \Rightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$$

۱۲



$$\begin{aligned} \triangle ABD: AB^2 &= AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot DB \cdot \cos \alpha \xrightarrow{\times DC} AB^2 \cdot DC = DC \cdot AD^2 + DC \cdot DB^2 - 2DC \cdot AD \cdot DB \cdot \cos \alpha \quad (1) \\ \triangle ACD: AC^2 &= AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\times DB} AC^2 \cdot DB &= DB \cdot AD^2 + DB \cdot DC^2 + 2DB \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \alpha \quad (2) \\ \xrightarrow{(1) + (2)} AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB &= DC \cdot AD^2 + DC \cdot DB^2 - 2DC \cdot AD \cdot DB \cdot \cos \alpha \\ &+ DB \cdot AD^2 + DB \cdot DC^2 + 2DB \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \alpha \Rightarrow AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB \\ &= AD^2 \underbrace{(DC + DB)}_{BC} + BD \cdot DC \underbrace{(DC + DB)}_{BC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB &= AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC \\ DC = DB = \frac{a}{2}, AC = b, \Rightarrow AB = c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} \times c^2 + \frac{a}{2} \times b^2 = AD^2 \times a + \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times a \Rightarrow \frac{a}{2}(c^2 + b^2) = \frac{a}{2}\left(2AD^2 + \frac{a^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = 2AD^2 + \frac{a^2}{2}$$

۱۳

$$\text{الف) } \frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2}AH \times BD}{\frac{1}{2}AH \times DC} = \frac{BD}{DC}$$

DM , DN مساویند زیرا فاصله‌ی هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه برابر است. (ب)

$$\text{ب) } \frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2}DM \times AB}{\frac{1}{2}DN \times AC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \text{از مقایسه رابطه الف و ب}$$

۱۴

$$\text{الف) } \hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow \cos A < 0 \xrightarrow[\div bc]{\times bc} bc \cdot \cos A < 0 \Leftrightarrow -bc \cdot \cos A > 0$$

$$\xrightarrow[-(b^2 + c^2)]{+(b^2 + c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A > b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

$$\text{ب) } \hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow \cos A > 0 \xrightarrow[\div bc]{\times bc} bc \cdot \cos A > 0 \Leftrightarrow -bc \cdot \cos A < 0$$

$$\xrightarrow[-(b^2 + c^2)]{+(b^2 + c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A < b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$\text{پ) } \hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow \cos A = 0 \xrightarrow[\div bc]{\times bc} bc \cdot \cos A = 0 \Leftrightarrow -bc \cdot \cos A = 0$$

$$\xrightarrow[-(b^2 + c^2)]{+(b^2 + c^2)} b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

۱۵