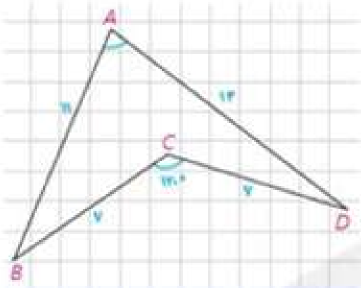
نمونه سوالات
ترکیبی هندسه یازدهم

۲۰ گرفتن با **فیلیمومدرسه** راحته!

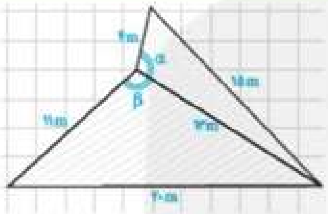
FilimoSchool.com

- ویدیوهای آموزشی
- معلم خصوصی
- خلاصه درس و جزوه
- سوالات تستی و تشریحی

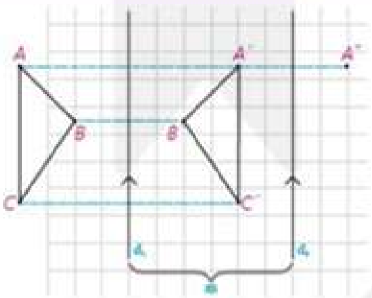
۱
در شکل، اولاً اندازه‌ی زاویه‌ی A را به دست آورید.
ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.



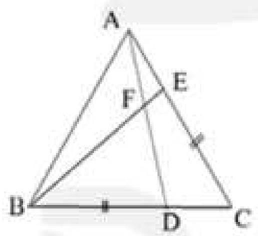
۲
دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چه‌قدر می‌شود؟
نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد. $(\alpha = \beta)$



۳
در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصله‌ی m از آن قرار دارد و مثلث $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ بازتاب مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن‌را $A''\overset{\Delta}{B''}C''$ بنامید.
الف) نشان دهید: $AA'' = ۲m$
ب) اندازه‌ی BB'' و CC'' چه‌قدر است؟
پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''\overset{\Delta}{B''}C''$ را تصویر $A\overset{\Delta}{B}C$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

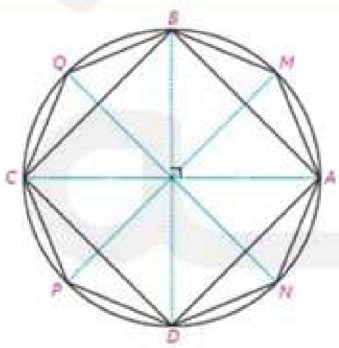


۴
مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.
با استفاده از دوران ثابت کنید:
$AD = BE$ و $\widehat{BFD} = ۶۰^{\circ}$

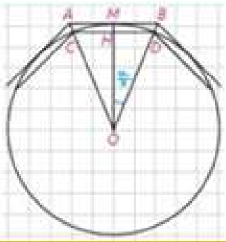


۵
با استفاده از دوران ثابت کنید هر گاه دو خط یکدیگر را قطع کنند، زاویه‌های مقابل مساوی یکدیگرند.

۶
دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم؛ چهارضلعی ABCD یک مربع است؛ چرا؟ عمودمنصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت‌ضلعی AMBQCPDN منتظم است.



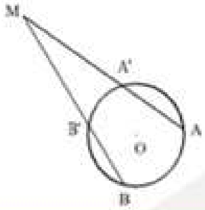
۷
یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن درنظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه $AB = ۲r\,tg\frac{۱۸۰}{n}$ و $CD = ۲r\,Sin\frac{۱۸۰}{n}$.



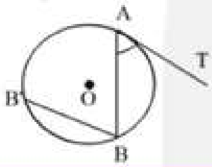
۸ در دایره‌ی $C(O , R)$، $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$ و $AB = ۱۰$ فاصله‌ی O از وتر AB را به دست آورید.

۹ امتدادهای دو وتر AA' و BB' از دایره‌ی O در نقطه‌ی M متقاطعند. تعیین کنید:

اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{A'B'}$ را، اگر $\overset{\frown}{AB} = ۳\overset{\frown}{A'B'}$ و $\widehat{M} = ۲۵^\circ$ باشد.

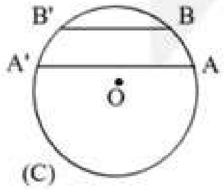


۱۰ زاویه‌ی ظلی TAB در دایره‌ی به مرکز O داده شده است. به کمک خط BB' که موازی خط مماس AT رسم شده است. ثابت کنید که: $\widehat{TAB} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$.



۱۱ ثابت کنید در هر دایره کمانهای محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.

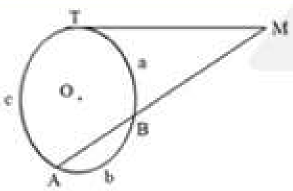
راهنمایی: از ویژگی زاویه‌ی محاطی، یا قطر عمود بر وتر استفاده کنید.



۱۲ خط مماس بر دایره در نقطه‌ی T و امتداد وتر AB در نقطه‌ی M متقاطعند. با فرض $\overset{\frown}{TB} = a$، $\overset{\frown}{BA} = b$ و $\overset{\frown}{AT} = c$:

تعیین کنید:

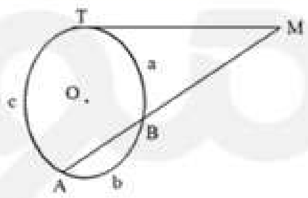
c را در صورتی که $a = ۵۵^\circ$ و $\widehat{M} = ۳۰^\circ$ باشد.



۱۳ خط مماس بر دایره در نقطه‌ی T و امتداد وتر AB در نقطه‌ی M متقاطعند. با فرض $\overset{\frown}{TB} = a$، $\overset{\frown}{BA} = b$ و $\overset{\frown}{AT} = c$:

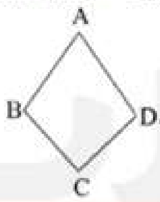
اندازه‌ی زاویه‌ی M را در حالت زیر تعیین کنید.

$\dfrac{a}{۱} = \dfrac{b}{۲} = \dfrac{c}{۷}$



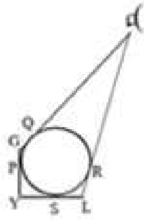
۱۴ در چهارضلعی $ABCD$ (شکل روبه‌رو)، $AB + CD = AD + BC$ است. ثابت کنید که این چهارضلعی محیطی است.

راهنمایی: روی ضلع AB، پاره‌خط $AM = AD$ و روی ضلع BC پاره‌خط $CN = CD$ را جدا کرده، از ویژگی مثلثهای متساوی‌الساقین استفاده کنید.



۱۵ ضلعهای چهارضلعی محیطی $GOLY$ بر دایره مماسند (شکل روبه‌رو)

ثابت کنید: $GO + LY = OL + GY$



۱

$\overset{\triangle}{BCD}: BD^2 = 7^2 + 7^2 - 2(7)(7)\cos 120^\circ$

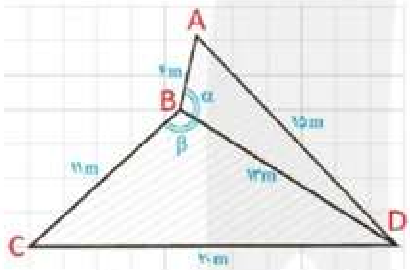
$\xrightarrow{\cos 120^\circ = \frac{-1}{2}} BD^2 = 49 + 49 + 49 = 3 \times 49 \Rightarrow BD = 7\sqrt{3}$

$\overset{\triangle}{ABD}: BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD\cos A$

$\Rightarrow 3 \times 49 = 11^2 + 13^2 - 2(11)(13)\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$

$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} = \frac{1}{2}(11)(13)\sin 60 - \frac{1}{2}(7)(7)\sin 120 = \frac{143\sqrt{3}}{4} - \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{94\sqrt{3}}{4}$

۲



$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$

$P_{ABD} = \frac{4 + 13 + 15}{2} = 16m$

$P_{BCD} = \frac{11 + 13 + 20}{2} = 22m$

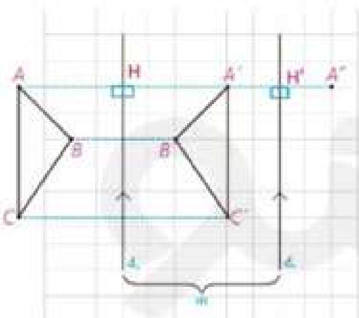
$S_{ABD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16 \times 12 \times 3 \times 1} = 24m^2$

$S_{BCD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{22 \times 11 \times 9 \times 2} = 66m^2$

$S_{ABCD} = 24 + 66 = 90\,m^2$

$\left.\begin{array}{l} S_{ABD} = \frac{1}{2}AB.\,BD.\sin\alpha \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 4 \times 13\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{12}{13} \\ S_{BCD} = \frac{1}{2}BC.\,DB.\sin\beta \Rightarrow 66 = \frac{1}{2} \times 11 \times 13\sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{12}{13} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$

۳



الف) $AA'' = AH + HA' + A'H' + H'A''$

$\xrightarrow[A'H' = H'A'']{AH = HA'} AA'' = 2HA' + 2A'H'$

$\Rightarrow AA'' = 2\underbrace{(HA' + A'H')}_{m} \Rightarrow AA'' = 2m$

ب) بنا بر اثبات قسمت الف به روش مشابه نتیجه می‌گیریم که:
$BB'' = CC'' = 2m$

پ) با انتقالی تحت بردار انتقالی که اندازه‌ی آن دو برابر فاصله‌ی بین دو خط بازتاب d_1 و d_2 یعنی $2m$ و راستای آن عمود بر این دو خط است، می‌توان مثلث $\overset{\triangle}{A''B''C''}$ را تصویر را تصویر مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ دانست.

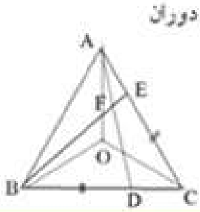
نتیجه می‌گیریم، ترکیب دو بازتابی که محورهای بازتاب موازی یکدیگر هستند یک انتقال است.

۴

نیمسازهای زاویه‌های A و B و C را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند. در این صورت $OA = OB = OC$ و $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \widehat{BOC} = 120^\circ$ داریم:

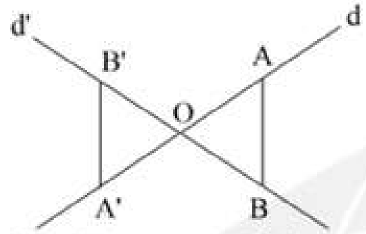
$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} OA = OB \\ \widehat{AOB} = 120^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow A \xrightarrow{\text{تحت دوران } 120^\circ \text{ به مرکز } O} B \\ \widehat{OAE} = \widehat{OCD} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} OE = OD \\ \widehat{EOD} = 120^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow D \xrightarrow{\text{تحت دوران } 120^\circ \text{ به مرکز } O} E \end{array}\right\} \Rightarrow AD \xrightarrow{\text{تحت دوران } 120^\circ \text{ به مرکز } O} BE$

پس تبدیل ایزومتری است. پس $AD = BE$. از طرفی زاویه‌ی بین هر خط و دوران یافته‌ی آن با زاویه‌ی دوران برابرست.



۵

دو خط d و 'd در نقطه‌ی O متقاطع هستند. نقاط A و 'A را روی خط d در نظر می‌گیریم. به طوری که O وسط آنها باشد. و نقاط 'B و 'B را روی خط 'd در نظر می‌گیریم به طوری که O وسط B و 'B باشد.



$$\left.\begin{matrix} OA=OA' \\ \widehat{AOA'}=۱۸۰^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۸۰^\circ \text{ به مرکز } O} A'$$

$$\left.\begin{matrix} OB=OB' \\ \widehat{BOB'}=۱۸۰^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow B \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۸۰^\circ \text{ به مرکز } O} B'$$

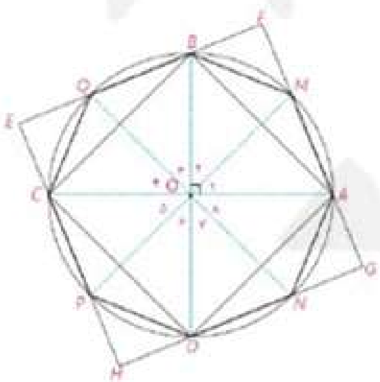
$$O \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۸۰^\circ \text{ به مرکز } O} O$$

$$\Rightarrow \overset{\triangle}{ABO} \xrightarrow{\text{تحت دوران } ۱۸۰^\circ \text{ به مرکز } O} \overset{\triangle}{A'B'O}$$

دوران تبدیل ایزومتری است. پس $ABO \cong A'B'O'$ در نتیجه $\widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲$.

۶

در چهارضلعی ABCD قطر هم‌دیگر را نصف می‌کنند و با هم برابرند پس مستطیل است و چون قطرها بر هم عمودند نتیجه می‌گیریم که مربع است.
عمودمنصف هر ضلع نیمساز رأس مقابل نیز هست. پس:



$$O_۱ = O_۲ = O_۳ = O_۴ = O_۵ = O_۶ = O_۷ = O_۸ = ۴۵^\circ$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{BQ} = \overset{\frown}{QC} = \overset{\frown}{CP} = \overset{\frown}{PD} = \overset{\frown}{DN} = \overset{\frown}{NA}$$
$$\Rightarrow AM = MB = BQ = QC = CP = PD = DN = NA$$

۷

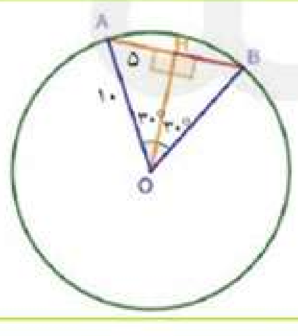
$$O\overset{\triangle}{H}D : \widehat{H} = ۹۰^\circ \xrightarrow{OD = r} \mathrm{Sin}\frac{۱۸۰}{n} = \frac{HD}{r} \xrightarrow{\times ۲} ۲\,\mathrm{Sin}\frac{۱۸۰}{n} = \frac{۲HD}{r} \xrightarrow{۲HD = CD}$$

$$CD = ۲r\,\mathrm{Sin}\frac{۱۸۰}{n}$$

$$O\overset{\triangle}{M}B : \widehat{M} = ۹۰^\circ \xrightarrow{OM = r} \mathrm{tg}\frac{۱۸۰}{n} = \frac{MB}{r} \xrightarrow{\times ۲} ۲\,\mathrm{tg}\frac{۱۸۰}{n} = \frac{۲MB}{r} \xrightarrow{۲MB = AB}$$

$$AB = ۲r\,\mathrm{tg}\frac{۱۸۰}{n}$$

۸



می‌دانیم که مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. و برای پیدا کردن فاصله‌ی وتر از مرکز باید نقطه‌ی O را بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره‌خط OH را به دست آوریم. قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند بنابراین $AH = ۵$ پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH داریم:

$$OH = \sqrt{OA^۲ - AH^۲} \Rightarrow OH = \sqrt{۱۰^۲ - ۵^۲} = \sqrt{۷۵} = ۵\sqrt{۳}$$

۹

$$\widehat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{۲} \Rightarrow ۲۵ = \frac{۳\overset{\frown}{A'B'} - \overset{\frown}{A'B'}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{A'B'} = ۲۵^\circ$$

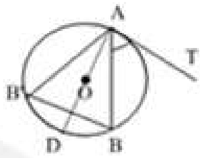
۱۰

قطر AD را رسم می‌کنیم. قطر AD بر مماس AT عمود است. پس بر وتر موازی آن یعنی BB' عمود است.
می‌دانیم قطر عمود بر وتر آن‌را نصف می‌کند. پس AD عمودمنصف BB' است. بنابراین $AB = AB'$ داریم:

$$\left.\begin{matrix} AT \parallel BB' \\ \text{مورب } AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{TAB} = \hat{B} \quad (۱)$$

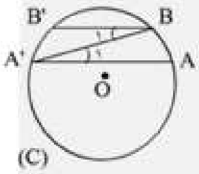
$$\left.\begin{matrix} \text{زاویه محاطی } \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AB'}}{۲} \\ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB'} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \quad (۲)$$

$$(۲), (۱) \text{ از } \Rightarrow \widehat{TAB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$



۱۱

از B به A' وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} BB' \parallel AA' \\ \text{مورب } BA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{A'}_۱ \\ \text{زاویه محاطی } \hat{B}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} \\ \text{زاویه ی محاطی } \hat{A'}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{AB}$$

۱۲

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{BT}}{۲} \Rightarrow \hat{M} = \frac{c - a}{۲} \Rightarrow ۳۰ = \frac{c - ۵۵}{۲} \Rightarrow c = ۱۱۵^\circ$$

۱۳

$$\frac{a}{۱} = \frac{b}{۴} = \frac{c}{۷} = \frac{a + b + c}{۱ + ۴ + ۷} = \frac{۳۶۰}{۱۲} = ۳۰ \rightarrow \begin{cases} a = ۳۰^\circ \\ b = ۱۲۰^\circ \\ c = ۲۱۰^\circ \end{cases}$$

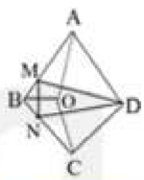
$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{BT}}{۲} = \frac{c - a}{۲} = \frac{۲۱۰ - ۳۰}{۲} = ۹۰^\circ$$

۱۴

با توجه به فرض مسئله داریم:

$$AB + CD = AD + BC \rightarrow \cancel{AM} + BM + \cancel{CD} = \cancel{AD} + \cancel{CN} + BN \Rightarrow BM = BN$$

پس مثلث $\overset{\triangle}{BMN}$ متساوی‌الساقین است. نیمساز زوایای C ، B ، A را رسم می‌کنیم. در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{AMD}$ نیمساز زاویه A عمودمنصف ضلع MD می‌باشد و در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{BMN}$ نیمساز زاویه‌ی B عمودمنصف MN می‌باشد و در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{NCD}$ نیمساز زاویه‌ی C عمودمنصف ND می‌باشد.
می‌دانیم عمودمنصف‌های مثلث $\overset{\triangle}{DMN}$ همرسند. پس نیمسازهای زوایای C ، B ، A در یک نقطه همرسند. پس چهارضلعی $ABCD$ محیطی است.



۱۵

از هر نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آنگاه اندازه‌های دو مماس برابرند.

$$\left.\begin{matrix} YP = YS \\ LR = SL \\ OR = OQ \\ GP = GQ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} YP + LR + OR + GP = YS + SL + OQ + GQ$$

$$\Rightarrow YG + LO = YL + OG$$